Segunda edición

ÁLGEBRA

JUAN ANTONIO CUÉLLAR

Mc
Graw
Hill

ÁLGEBRA

Juan Antonio Cuéllar Carvajal
Universidad Autonóma de Nuevo León

Segunda edición

Revisión Técnica
M. en E. Ing. Gerardo Aguilera González
Universidad Autonóma de Nuevo León

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Publisher de división escolar: Jorge Rodríguez Hernández
Director editorial y de ventas. División Bachillerato: Ricardo Martín del Campo Mora
Editora sponsor: Sergio G. López Hernández
Supervisora de producción: Marxa de la Rosa Pliego
Diseño de portada: Víctor Ortíz
Iconografía: Saúl Martín del Campo Núñez
Formación tipográfica: Juan Castro (Trocas)

ÁLGEBRA

Segunda edición

McGraw Hill Educación

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.
Punta Santa Fe,
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0380-0
(ISBN: 970-10-4199-2 primera edición)

1234567890 109876543210
Impreso en México *Printed in Mexico*

The McGraw-Hill Companies

Con el amor de siempre, para mi hijo
Carlos Enrique Cuéllar Aldaco

Índice de contenido

1

Conjuntos

El concepto de *conjunto* no está definido en términos matemáticos; sin embargo, intuitivamente tenemos una idea de lo que significa esta palabra, ya que en la vida diaria nuestra mente organiza de manera inconsciente los objetos en conjuntos tales como:

- Los miembros de una familia
- Los alumnos de un salón de clases
- Los jugadores de beisbol de cierto equipo
- Los partidos políticos de un país

Podemos decir intuitivamente que un *conjunto* es una colección de objetos que tienen una característica bien definida. Esos objetos reciben el nombre de *elementos* de dicho conjunto.

Notación de conjuntos

Por convención, para representar los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas del alfabeto, mientras que para simbolizar sus elementos se usan las minúsculas.

Cuando queremos indicar que un objeto a es un elemento de un conjunto A, utilizamos la notación $a \in A$. Esta notación puede tener cualquiera de las lecturas o significados siguientes.

- El objeto a es un elemento del conjunto A.
- El objeto a pertenece al conjunto A.
- El objeto a está contenido en A.

De esta manera, el símbolo $\in$ establece la *relación de pertenencia* entre un elemento y un conjunto.

Asimismo, en la notación $a \notin A$ el símbolo $\notin$ indica que el objeto a no pertenece al conjunto A.

Formas de especificar un conjunto

Un conjunto puede especificarse de dos maneras:

- Por extensión
- Por comprensión o en forma constructiva

Un conjunto está especificado o determinado por el *método de extensión* cuando se enumeran todos sus elementos, separados por comas y encerrados todos ellos entre llaves.

Ejemplo 1

Escribe los conjuntos siguientes dados por extensión.

a. El conjunto de las vocales del alfabeto.

Solución

Si utilizamos la letra A para representar ese conjunto, entonces:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

b. El conjunto de los días de la semana.

Solución

Si utilizamos la letra B para representar tal conjunto, entonces:

$$B = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

c. El conjunto de los enteros positivos mayores que 5 pero menores que 10.

Solución

Si C representa al conjunto que nos ocupa, entonces:

$$C = \{6, 7, 8, 9\}$$

Un conjunto está determinado por el *método de comprensión* cuando sus elementos se identifican por cierta propiedad o característica que tienen en común. Por ejemplo: "el conjunto P consta de todos los países de Europa".

Para especificar un conjunto por el método de comprensión se utiliza la notación siguiente:

$$A = \{x \mid x \text{ tiene cierta propiedad}\}$$

La expresión anterior se lee: "El A es el conjunto de todas las x tales que x tiene cierta propiedad". (El símbolo $\mid$ significa "tal que".) El símbolo x se llama *variable* y el conjunto, *dominio de la variable*.

Ejemplo 2

Especifica por el método de comprensión los conjuntos siguientes:

a. $A = \{a, e, i, o, u\}$

Solución

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$$

b. $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Solución

$$B = \{x \mid x \text{ es un número natural par menor que } 10\}$$

Ejercicios 1

I. *Especifica por extensión cada uno de los conjuntos siguientes:*

1. El conjunto de los números naturales entre 8 y 20.

2. El conjunto de los meses del año que no tienen 31 días.

3. El conjunto de las vocales del alfabeto.

4. El conjunto de los números múltiplos de 5 mayores que 20, pero menores que 35.

5. El conjunto de los números pares mayores o iguales que 10, pero menores que 18.

6. El conjunto de los números impares mayor que 9 pero menores o iguales que 15.

II. *Especifica los conjuntos siguientes en forma constructiva (es decir, por comprensión):*

7. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$

8. $B = \{a, e, i, o, u\}$

9. $C = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

10. D = {enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre}

11. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

12. $N = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

13. $Q = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

14. $R = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Clases de conjuntos

Por sus características, hay cierto tipo de conjuntos que debemos estudiar:

- Conjunto vacío
- Conjuntos finitos
- Conjuntos infinitos
- Conjunto unitario

Conjunto vacío

El conjunto que carece de elementos se llama *conjunto vacío* o *conjunto nulo*. Para representar un conjunto de este tipo se usan los símbolos $\varnothing$ o $\{\ \}$, que se leen "conjunto vacío" o "conjunto nulo". Por ejemplo:

El conjunto de los números naturales mayores que 6
pero menores que 7 $= \varnothing$ o $\{\ \}$.

Conjuntos finitos

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito si el proceso de contar sus elementos tiene fin; por ejemplo:

- El conjunto de los meses del año.
- El conjunto de los países del planeta Tierra.

Conjuntos infinitos

Un conjunto cuyo proceso de contar sus elementos nunca termina es infinito. Por ejemplo:

- El conjunto de los números naturales.
- $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$

Conjunto unitario

Un conjunto que tiene un solo elemento se llama *conjunto unitario*; por ejemplo:

$$\text{Si } A = \{x \mid x \text{ es un número par mayor que 12 pero menor que 16}\}$$

entonces su único elemento es el número 14; luego, A es un conjunto unitario.

Cardinalidad de un conjunto finito

La cardinalidad de un conjunto finito es el número entero positivo que representa la cantidad de sus elementos. La cardinalidad (en este caso, del conjunto A) se representa con el símbolo Card (A) o $|A|$. Por ejemplo:

La cardinalidad del conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ es 7
y se representa por: Card $(A) = 7$.

Cabe precisar que la cardinalidad de un conjunto vacío es cero.

Relaciones entre conjuntos

A continuación veremos algunas de las formas de relacionar dos conjuntos.

Conjuntos equivalentes

Dos conjuntos son equivalentes si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos. Esto significa que se pueden formar parejas con los elementos de los conjuntos, de forma tal que cada elemento de un conjunto quede apareado exactamente con un y sólo un elemento de otro conjunto.

Si queremos señalar que dos conjuntos son equivalentes, se utiliza el símbolo $\leftrightarrow$. Así, la notación de conjuntos $A \leftrightarrow B$ indica que A y B son conjuntos equivalentes. Por ejemplo:

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $A \leftrightarrow B$, ya que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre unos elementos.

Conjuntos iguales

Dos conjuntos son iguales si ambos tienen los mismos elementos. Para representar dicha igualdad se utiliza el símbolo $=$. Así, para indicar que los conjuntos P y Q son iguales se usa la notación $P = Q$. Por ejemplo, si

$P = \{x, y, z\}$	y	$Q = \{z, x, y\}$,	entonces $P = Q$
$A = \{x \mid 2x = 6\}$	y	$B = \{3\}$,	entonces $A = B$
$C = \{a, e, i, o, u\}$	y	$D = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$,	entonces $C = D$

Subconjuntos

El conjunto A es un subconjunto de B si cada elemento de A es también un elemento de B. Para representar esta relación se utiliza la notación $A \subset B$, que se lee "A está contenido en B" o también "A es subconjunto de B".

Para indicar que A no es subconjunto de B se utiliza la notación $A \not\subset B$.

Ejemplo 3

a. Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $A \subset B$, ya que los elementos 2, 4 y 6 de A pertenecen también al conjunto B.

b. $A = \{5, 10, 15, 20\}$ y $B = \{20, 10, 5, 15\}$.

En este ejemplo, $A \subset B$ y $B \subset A$; es decir, se observa que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. De acuerdo con esto, podemos decir que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A; o sea $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Subconjunto propio

Un conjunto A es subconjunto propio de B si se cumplen las condiciones siguientes:

1. $A \subset B$ (A es un subconjunto de B)
2. $A \neq B$ (A y B no son iguales)

La segunda condición indica que la cardinalidad del conjunto B es mayor que la de A. Precisemos esto en la página que sigue.

Subconjunto propio

El conjunto A es un subconjunto propio de B si cada elemento de A también es un elemento de B, pero cada elemento de B no es un elemento de A. La relación anterior se representa por la notación de conjuntos $A \subseteq B$.

Conjuntos comparables

Se dice que dos conjuntos A y B son comparables si $A \subset B$ o $B \subset A$.

Ejemplo 4

Determina si los pares de conjuntos indicados son comparables.

a. $A = \{1, 4, 7, 10\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Solución

Como $A \subset B$, entonces dichos conjuntos son comparables.

b. $M = \{a, b, c\}$; $N = \{b, c, d, e\}$

Solución

Como $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$, entonces dichos conjuntos no son comparables.

Conjunto potencia

Dado un conjunto A cualquiera, la familia de todos los subconjuntos posibles que pueden formarse con sus elementos se llama *conjunto potencia* de A y se representa con el símbolo $P(A)$.

Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos, considerando que el conjunto vacío y A son subconjuntos de A.

Para determinar todos los subconjuntos de A que se pueden formar con sus elementos se procede de la manera siguiente:

1. Se forman todos los subconjuntos con un solo elemento de A.
2. Se forman todos los subconjuntos con dos elementos de A.
3. Se incluye el conjunto vacío y dicho conjunto.
4. Si A tiene tres o más elementos se procede en la forma descrita anteriormente hasta obtener 2^n subconjuntos de A.

Ejemplo 5

Determina el conjunto potencia de $A = \{2, 4, 6\}$.

Solución

En este caso, $n = 3$; luego $2^3 = 8$. El conjunto potencia de A consta de 8 subconjuntos de A, que son:

$$P(A) = \varnothing; \{2, 4, 6\}; \{2\}; \{4\}; \{6\}; \{2, 4\}; \{2, 6\}; \{4, 6\}$$

Ejercicios 2

I. *Escribe en notación de conjuntos las afirmaciones siguientes.*

1. x es elemento del conjunto A.

2. A es subconjunto de B.

3. A y B son conjuntos comparables.

4. A y B son conjuntos equivalentes.

5. A es un conjunto vacío.

6. P y Q son conjuntos iguales.

7. Q no es subconjunto A.

8. 4 no es elemento del conjunto R.

9. A no es subconjunto de B.

10. La cardinalidad del conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ es 5.

II. *Con base en los conjuntos siguientes, determina cuáles de las afirmaciones son verdaderas:*

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$C = \{x \mid x \text{ es un número natural menor que } 13\}$

$D = \{x \mid x \text{ es una letra del alfabeto}\}$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$F = \{x \mid x \text{ es un número par}\}$

11. $9 \in F$

12. Card $(B) = 5$

13. $7 \notin F$

14. $A \leftrightarrow B$

15. B y D son conjuntos comparables.

16. $A \subset F$

17. $D \subset A$

18. $A = B$

19. $E = C$

20. F es un conjunto infinito.

21. Card $(C) = 13$

22. $P(B) = 10$

23. $P(B) = 32$

24. $A \not\subset B$

25. $F \in C$

26. C y F son conjuntos comparables.

27. El conjunto formado por los elementos comunes de A y B es un conjunto vacío.

28. $B \subset D$

III. *Realiza lo que se indica en cada ejercicio:*

29. Escribe todos los subconjuntos que se pueden formar a partir de los elementos del conjunto $A = \{2, 4, 6\}$.

30. Sea $B = \{a, b, c, d\}$. Halla $P(B)$.

31. Sea $B = \{a, 2\}$. Halla $P(B)$.

32. Sea $Q = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Halla $P(Q)$.

Operaciones con conjuntos

A continuación veremos operaciones entre conjuntos que dan lugar a conjuntos nuevos.

En la solución de problemas de conjuntos es muy probable que todos los conjuntos considerados sean subconjuntos de otro conjunto dado, al cual llamaremos *conjunto universo o universal* y lo simbolizaremos con la letra mayúscula U.

Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a ambos; es decir, aquellos elementos que están o pertenecen al conjunto A y que también pertenecen a B. Esta operación se representa por la expresión:

$A \cap B$, que se lee "A intersección B".

Ejemplo 6

a. Si $M = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ y $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, encuentra $M \cap N$.

Solución

Los elementos comunes a los conjuntos M y N son 4 y 8; por consiguiente:

$$M \cap N = \{4, 8\}$$

De acuerdo con la notación de conjuntos, la intersección entre dos conjuntos A y B se define por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Conjuntos ajenos o disjuntos

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, $A \cap B = \emptyset$, dichos conjuntos son ajenos o disjuntos entre sí.

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, observa que $A \cap B = \emptyset$; por ende, dichos conjuntos son ajenos o disjuntos entre sí.

Propiedades de la intersección de conjuntos

Si A, B y C son subconjuntos de un conjunto universo U, entonces se cumplen las propiedades siguientes.

Propiedad	*Expresión*
Conmutativa:	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
De identidad:	$A \cap U = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B, representada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos conjuntos.

En notación de conjuntos se escribe:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo 7

a. Dados $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$, determina $A \cup B$.

Solución

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$$

b. Dados $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{0, 8, 10\}$, encuentra $A \cup B$.

Solución

$$A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Propiedades de la unión de conjuntos

Si A, B y C son subconjuntos de un conjunto universo U, entonces se cumplen las propiedades siguientes.

Propiedad	*Expresión*
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
De identidad:	$A \cup \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$

Diferencia de conjuntos

La diferencia entre dos conjuntos A y B, simbolizada con $A - B$, consiste en el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. En notación de conjuntos la diferencia $A - B$ se representa por:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo 8

Dados $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ y $B = \{12, 15, 18, 21, 24\}$, determina $A - B$.

Solución

Los elementos 3, 6 y 9 están en A pero no en B, por consiguiente:

$$A - B = \{3, 6, 9\}$$

Conjunto complemento

Dados el conjunto universo o universal U y otro conjunto A, donde A es subconjunto de U, entonces definimos el complemento de A, representado por A', como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a U pero que no pertenecen a A. En notación de conjuntos tenemos que:

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

De acuerdo con lo anterior, $A' = U - A$.

Ejemplo 9

Dados $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a, b, c, d\}$, encuentra A'.

Solución

$$A' = \{e, f, g\}$$

Los elementos e, f y g están en U pero no en A.

Ejercicios 3

I. *Dado el conjunto universo* $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *y los conjuntos:*

$A = \{1, 4, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

$D = \{x \mid x \in U$ y x es un número par$\}$

$E = [x \mid x \in U$ y x es un número impar$\}$

Halla:

1. $A \cup B =$ ______________________
2. $D \cap E =$ ______________________
3. $A' =$ ______________________
4. $B' =$ ______________________
5. $B \cap E =$ ______________________
6. $A \cup C =$ ______________________
7. $D' =$ ______________________
8. $A - B =$ ______________________
9. $A - D =$ ______________________
10. $C - B =$ ______________________
11. $B \cap C =$ ______________________
12. $E \cap C =$ ______________________
13. $A \cap D =$ ______________________
14. $A \cup (B \cap C) =$ ______________________

15. $(A \cap B) \cap E =$ ______________________

16. $(A \cup B)' =$ ______________________

17. $(A \cap B)' =$ ______________________

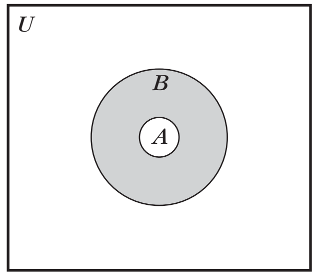
18. $(A \cap C) \cap B =$ ______________________

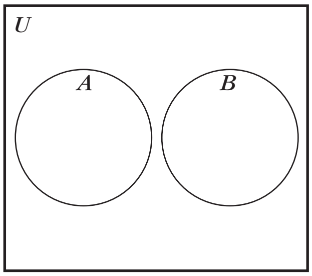
Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn consisten en figuras planas cerradas, por medio de las cuales se representan gráficamente las relaciones y operaciones entre conjuntos. Por lo general, el conjunto universo se representa por el conjunto de todos los puntos interiores de un rectángulo y sus subconjuntos, por círculos incluidos en ese rectángulo.

Ejemplo 10

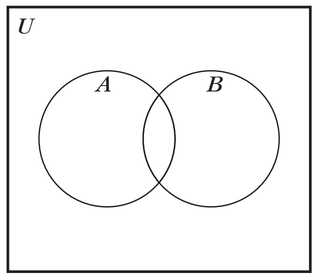
En el diagrama de la derecha se representa con un diagrama de Venn la relación $A \subset B$ y $A \neq B$.





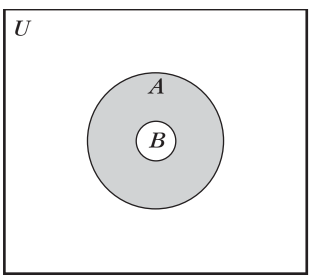
Sean A y B dos conjuntos ajenos o disjuntos entre sí; entonces el diagrama de Venn de la izquierda representa esta relación.

Si los conjuntos A y B no son comparables pero tampoco son ajenos, entonces el diagrama de Venn de la derecha representa esta relación.

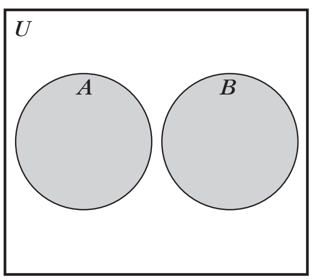


Los diagramas de Venn *a, b* y *c* mostrados en seguida representan la unión de los conjuntos A y B, que son subconjuntos de un conjunto universo U.

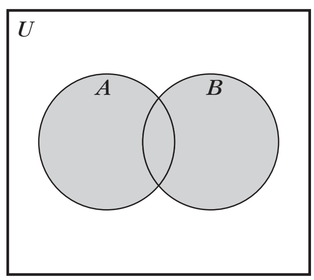
a.

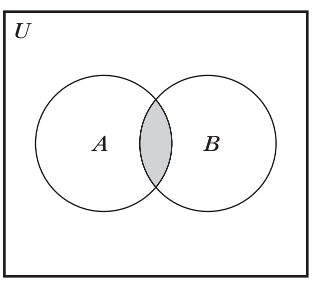


b.



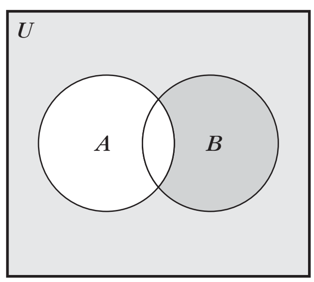
c.



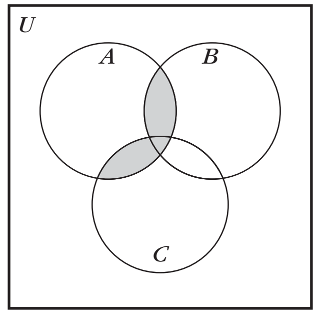


En el diagrama de Venn de la izquierda, el área sombreada representa la intersección de los conjuntos A y B.

Asimismo, la región sombreada de la figura de la derecha representa el complemento del conjunto A, es decir, A'.



Por último, en el diagrama de la derecha el área sombreada representa la operación $A \cap (B \cup C)$.



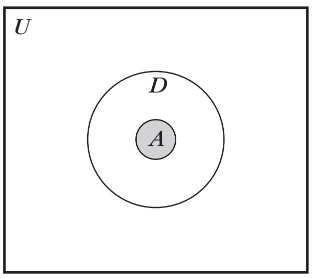
Para llegar a la solución anterior se recomienda indicar primero la región que corresponde a la operación $B \cup C$ y después sombrear la región que representa el conjunto $A \cap (B \cup C)$.

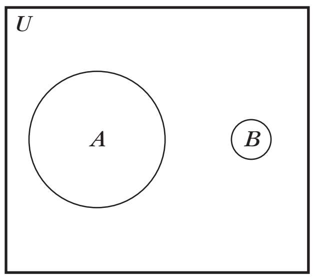
Ejercicios 4

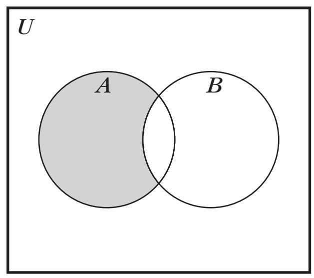
I. *Realiza lo que se indica en cada ejercicio:*

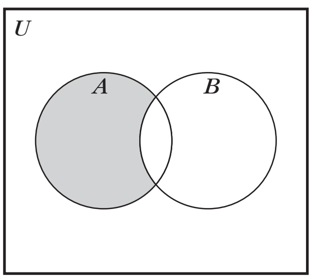
Determina el diagrama de Venn que corresponde a cada uno de los conjuntos siguientes.

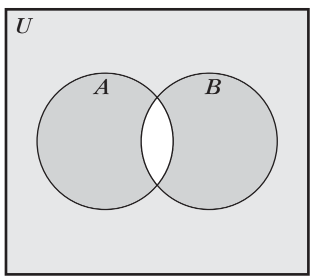
1. ( ) $C \cap D$
2. ( ) $D \subset A$
3. ( ) $C \cup D$
4. ( ) $(A \cap C) \cap B$
5. ( ) $A \cap (B \cup C)$
6. ( ) $B - A$
7. ( ) A'
8. ( ) $(B \cap C) \cup A$
9. ( ) $A \cup (B \cap C)$
10. ( ) $(A \cup B)'$
11. ( ) $B' \cap A$
12. ( ) $A - B$
13. ( ) B'
14. ( ) $(A \cap B)'$
15. ( ) $A \cap B = \varnothing$

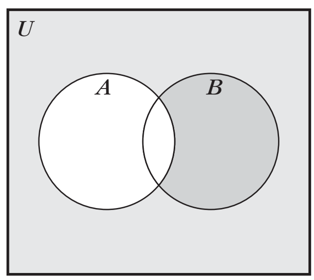
a.


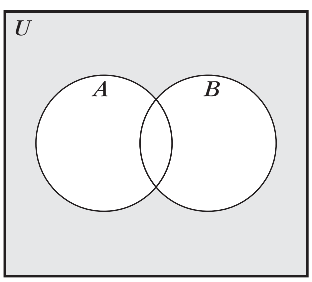
d.


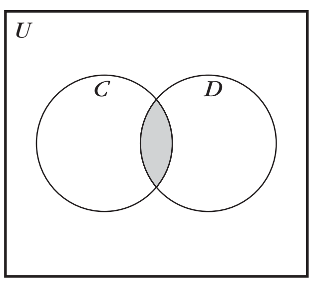
g.


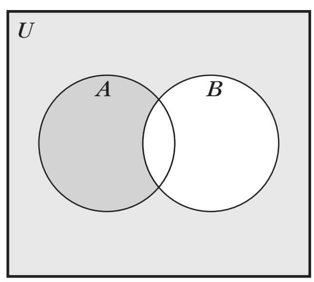
b.


e.


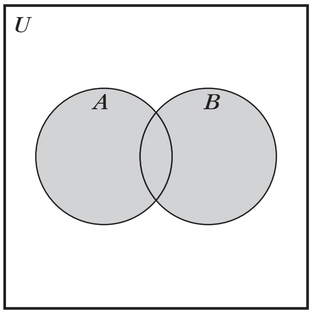
h.


c.


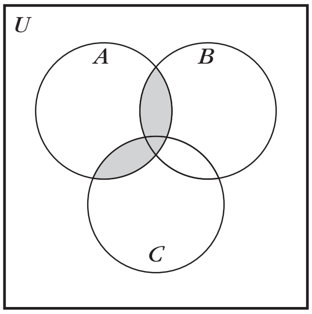
f.


i.


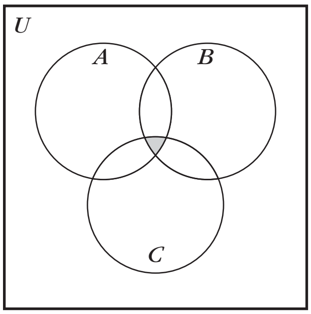
j.



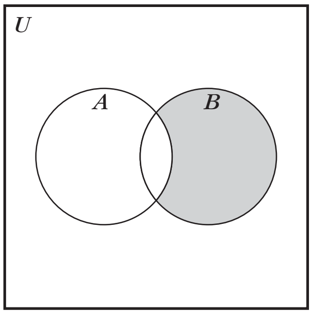
k.



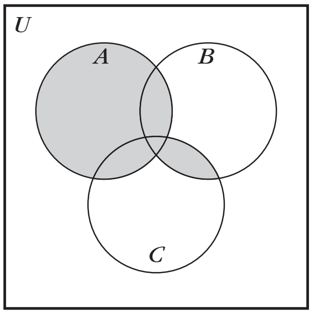
l.



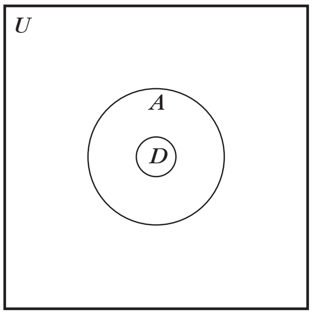
m.



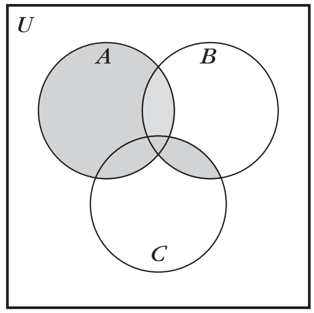
n.



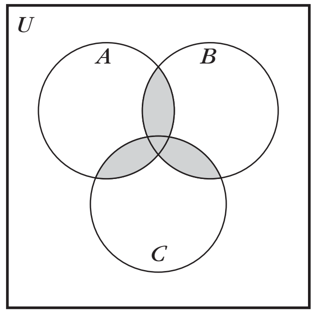
o.



p.

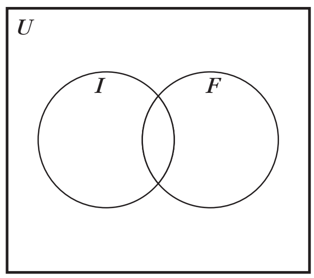


q.



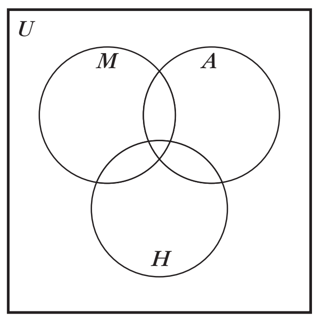
16. En un instituto de idiomas trabajan 67 personas, de las cuales 47 hablan inglés, 35 francés y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas que trabajan en dicho instituto no hablan inglés ni francés?

a. 7 *b.* 6 *c.* 9 *d.* 8



II. *Se sabe que en un grupo de bachillerato, a 19 alumnos les gustan las matemáticas, a 17 las artes, a 11 la historia; a 2 les gustan las tres materias; 12 prefieren matemáticas y artes; 7 historia y matemáticas; 5 artes e historia y a 5 no les gusta ninguna de ellas. Halla:*

Materia	*Número de alumnos a los que les gusta*
Matemáticas	19
Historia	11
Artes	17
Matemáticas, historia y artes	2
Matemáticas y artes	12
Matemáticas e historia	7
Artes e historia	5
Ninguna materia	5



17. ( ) El número de alumnos que hay en el grupo.

a. 35   *b.* 30   *c.* 28   *d.* 32

18. ( ) El número de alumnos a los que les gustan realmente las matemáticas y las artes.

a. 12   *b.* 8   *c.* 9   *d.* 10

19. ( ) El número de alumnos a los que les gustan realmente las artes y la historia.

a. 3   *b.* 4   *c.* 5   *d.* 2

20. ( ) El número de alumnos a los que únicamente les gustan las matemáticas.

a. 3   *b.* 4   *c.* 2   *d.* 5

21. ( ) El número de alumnos a los que realmente les gustan las artes.

a. 3   *b.* 4   *c.* 2   *d.* 5

22. ( ) El número de alumnos a los que realmente les gusta la historia.

a. 4   *b.* 2   *c.* 3   *d.* 1

23. ( ) El número de alumnos a los que realmente les gustan las matemáticas y la historia.

a. 5   *b.* 6   *c.* 4   *d.* 7

Producto cartesiano de conjuntos

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$. Se representa por $A \times B$.

En notación de conjuntos tenemos que:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Para distinguir un elemento de un producto cartesiano (un par ordenado) de otro y no tener repetición se establece el criterio de identidad siguiente.

Los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. De acuerdo con esto, los pares ordenados $(4, 7)$ y $(7, 4)$ no son iguales.

Ejemplo 11

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x, y\}$, encuentra:

a. $A \times B$
b. $B \times A$
c. $A \times A$.

Soluciones

a. $A \times B = \{(1, x), (1, y); (2, x)\ (2, y); (3, x), (3, y)\}$
b. $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3); (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

Si analizas estas dos soluciones, observarás que $A \times B$ es diferente a $B \times A$.

c. $A = \{1, 2, 3\}$; luego:

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3); (2, 1), (2, 2), (2, 3); (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Representación gráfica de un producto cartesiano

El producto de dos conjuntos cualesquiera puede representarse gráficamente usando rectas perpendiculares entre sí, a las cuales llamaremos *eje horizontal* y *vertical*, respectivamente.

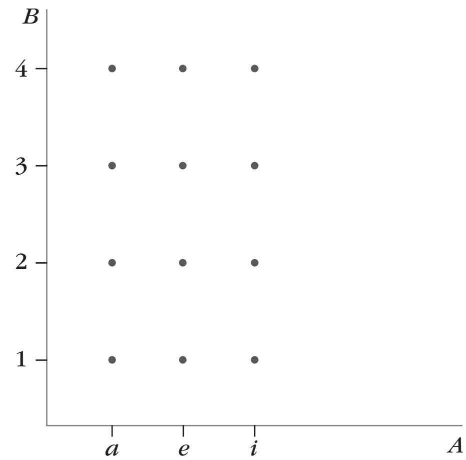
En el eje horizontal se marcan puntos espaciados a igual distancia, con los elementos del primer conjunto y a lo largo del eje vertical se marcan puntos separados a igual distancia con los elementos del segundo conjunto.

Ejemplo 12

Representa gráficamente el producto cartesiano $A \times B$, si $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución

En la gráfica de la derecha se muestra la solución.



Sistema de coordenadas cartesiano

René Descartes, filósofo y matemático francés, introdujo el sistema de coordenadas rectangulares mediante el cual se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y el conjunto de los pares ordenados de la forma (x, y). Estos pares son elementos del producto cartesiano $R \times R$, donde R es el conjunto de los números reales, es decir:

$$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R \text{ y } y \in R\}$$

El sistema de coordenadas cartesianas consiste en dos rectas, una vertical y otra horizontal, que se cortan en el punto *0*. Este punto se llama *origen* y sus coordenadas son (0, 0). Las rectas que se cortan perpendicularmente se denominan *ejes de coordenadas*; llamaremos *eje x* al horizontal y *eje y* al vertical (Figura 1).

Para ubicar o marcar un par ordenado (x, y) en el plano cartesiano se establece una escala numérica en cada eje y se conviene lo siguiente:

- El valor de x será positivo si el punto $P(x, y)$ se localiza a la derecha del eje y, y será negativo si se ubica a la izquierda.
- El valor de y será positivo si el punto $P(x, y)$ se halla arriba del eje x y será negativo en caso contrario.

Los elementos de cada par ordenado reciben el nombre de *coordenadas*; la que corresponde a la x se denomina *abscisa* y la que corresponde a la y se llama *ordenada*.

La abscisa o x, representa la distancia dirigida que hay del punto $P(x, y)$ al eje y, mientras que la ordenada o y, representa la distancia dirigida del punto $P(x, y)$ al eje x.

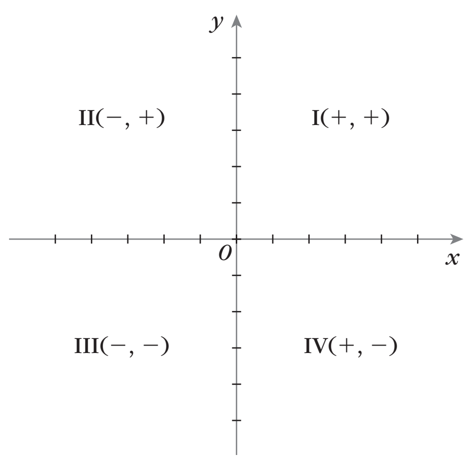


Figura 1. *Sistema de coordenadas cartesiano.*

Como se observa en la figura 1, los ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*.

Los cuadrantes se numeran de I a IV y en dicha figura se observan los signos de x y de y correspondientes en cada uno de los cuadrantes.

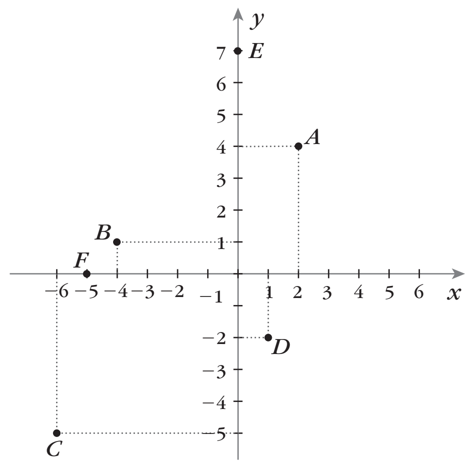
De acuerdo con lo anterior, para determinar las coordenadas de un punto en un sistema de coordenadas cartesiano se traza a partir de éste una línea punteada perpendicular al eje x. El número que corresponde al punto donde la línea corta al eje x será el valor de x, es decir, de la abscisa.

De igual manera, a partir del punto P se traza una línea punteada perpendicular al eje y, el número que corresponde al punto donde se interseca con dicho eje será el valor de y, o sea, de la ordenada.

Ejemplo 13 Determina las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.

Solución

A (2, 4)
B (−5, 1)
C (−6, −5)
D (1, −2)
E (0, 7)
F (−5.5, 0)



Ejemplo 14 *Localización de un punto en P(x, y) en un sistema de coordenadas cartesianas*

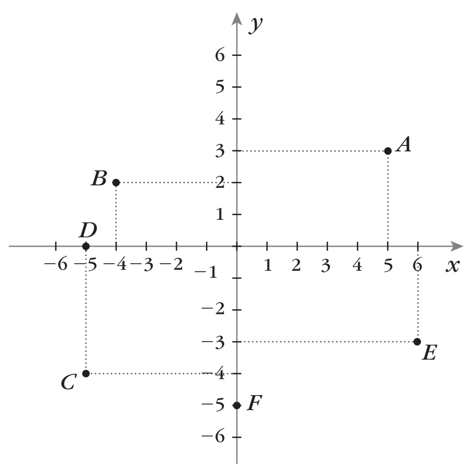
Para ubicar un punto cuyas coordenadas se conocen se siguen estos pasos:

1. Se marca su abscisa en el eje de las x.
2. Se traza una línea punteada perpendicular al eje de las x que pase por dicho punto.
3. Se marca su ordenada en el eje y y se traza una línea perpendicular a ese eje.

El punto donde se intersecan las líneas punteadas es la representación geométrica del par ordenado.

Marca los puntos siguientes en un sistema de coordenadas cartesianas:

- A (5, 3), es decir, $x = 5$ y $y = 3$.
- B (−4, 2)
- C (−5, −4)
- D (−5, 0)
- E (6, −3)
- F (0, −5)



Ejercicios 5

1. Dados los conjuntos $A = \{2, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$, halla el producto cartesiano:

   a. $A \times B =$
   b. $B \times A =$

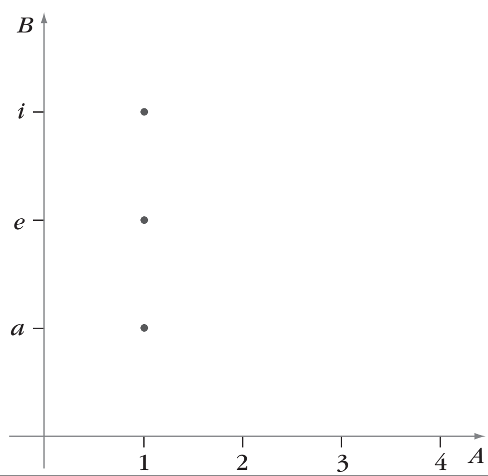
2. Dados los conjuntos $A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{1, 5, 7\}$, halla el producto cartesiano:

   a. $B \times A =$
   b. $A \times B =$
   c. $A \times A =$
   d. $B \times B =$

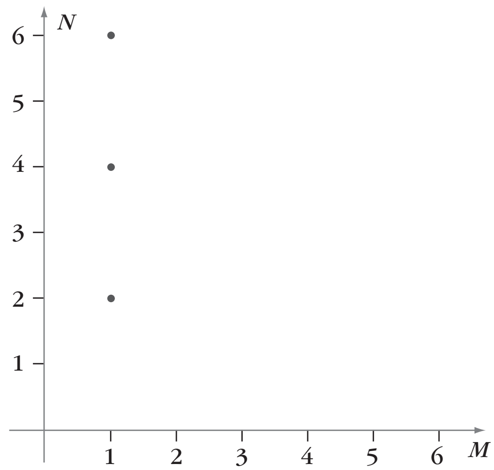
3. A partir de los conjuntos $A = \{m, n\}$, $B = \{6, 7\}$ y $C = \{7, 8\}$, determina el producto cartesiano $B \times (A \cup C)$.

4. Dados los conjuntos $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{ es un número par}\}$ y $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$, halla $A \times (B \cap C)$.

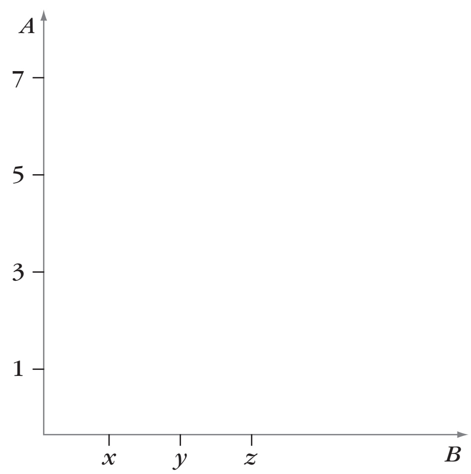
5. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, e, i\}$. Representa en un diagrama de coordenadas el producto cartesiano $A \times B$.



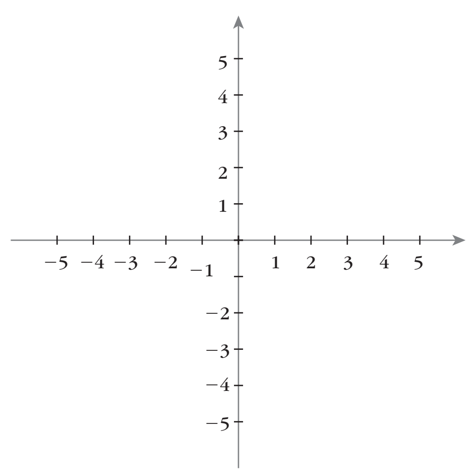
6. Dados $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $N = \{2, 4, 6\}$, representa en un diagrama de coordenadas el producto cartesiano $M \times N$.



7. Representa en un diagrama de coordenadas el producto cartesiano $B \times A$, si $B = \{x, y, z\}$ y $A = \{1, 3, 5, 7\}$.



8. Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$, si $A = \{-2, 0, 1, 3]$ y $B = \{-4, 0, 2, 4\}$.



Actividad grupal

Forma equipo para realizar la actividad siguiente:

En un grupo de 30 alumnos, 16 aprobaron el curso de matemáticas, 16 el de biología y 12 el de química. Si 3 alumnos aprobaron las tres materias, 5 solamente biología y química, 2 sólo química y 4 únicamente biología, halla:

a. El número de alumnos que aprobaron solamente matemáticas y biología.

R. 4

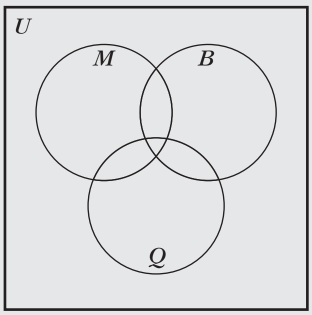
b. El número de alumnos que aprobaron solamente matemáticas.

R. 7

c. El número de alumnos que reprobaron en las tres materias.

R. 3

Utiliza el diagrama de Venn que sigue para contestar las preguntas anteriores.



Evaluación

I. *Dados los conjuntos* $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, *determina cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera:*

1. $A = B$

( )

2. $B \subset A$

( )

3. $A \subset B$

( )

4. A y B son comparables

( )

5. $A \leftrightarrow B \leftrightarrow A \leftrightarrow B$

( )

6. A y B son conjuntos ajenos

( )

7. Card $(A \cap B) = 0$

( )

8. Card $(A) = 5$

( )

9. Las proposiciones de los incisos 5, 6, 7 y 8 son verdaderas.

( )

II. *Dados los conjuntos* $A = \{x \mid x \text{ es un número natural par}\}$, $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$, *determina cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera:*

10. $5 \in A$

( )

11. A y B son comparables.

( )

12. $B \subset A$

( )

13. $A \subset B$

( )

14. $A \cap B = B$

( )

15. A es un conjunto finito.

( )

16. A es un conjunto infinito.

( )

17. $P(B) = 70$

( )

18. $P(B) = 64$

( )

19. Las proposiciones de los incisos 2, 3, 5, 6 y 9 son verdaderas.

( )

III. *Dados los conjuntos* $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ *y* $C = \{7, 8, 9\}$, *relaciona correctamente las columnas.*

20. ( ) Halla $B \cup C$

21. ( ) Halla $A \cap B$

22. ( ) Halla $(A \cup C)'$

23. ( ) Halla $A - B$

24. ( ) Halla C'

25. ( ) Halla $A \cap C$

26. ( ) Halla $(A \cup B) \cap C$

27. ( ) Halla $(A - C)'$

28. ( ) Halla $C - B$

a. $\{1, 3, 5\}$

b. $\varnothing$

c. $\{7, 9\}$

d. $\{2, 4\}$

e. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

f. $\{8\}$

g. $\{0, 6, 7, 8, 9\}$

h. $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

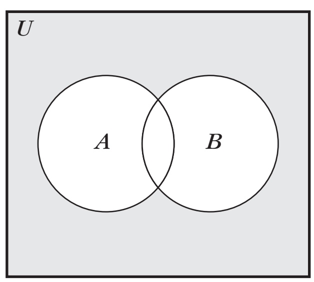
i. $\{0, 6\}$

j. $\{8, 9\}$

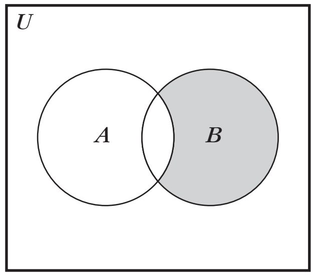
IV. *Determina el diagrama de Venn que corresponde a cada uno de los conjuntos siguientes. Relaciona correctamente:*

29. ( ) $A \cup B$

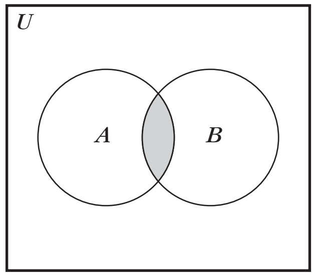
a.



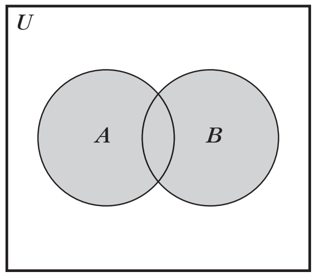
30. ( ) $A \cap B$

b. 

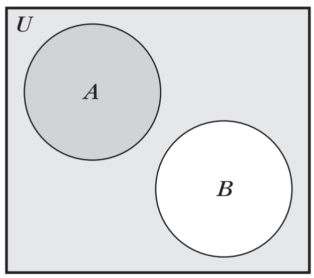
31. ( ) A'

c. 

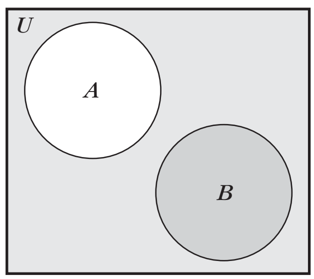
32. ( ) $A - B$

d. 

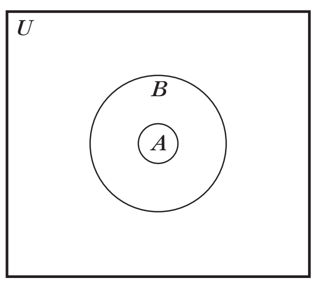
33. ( ) $(A \cup B)'$

e. 

34. ( ) $(A \cap B)'$

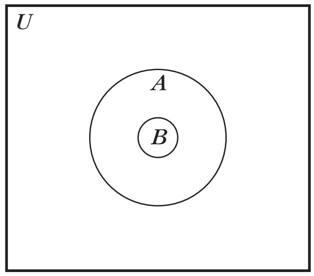
f. 

35. ( ) B'

g. 

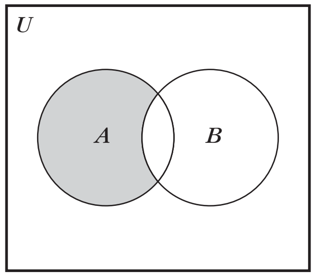
36. (   ) $B - A$

h.

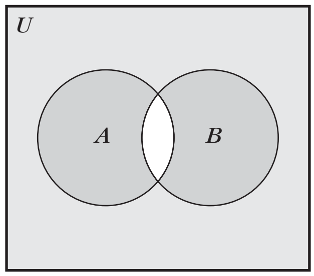


37. (   ) $B \subset A$

i.

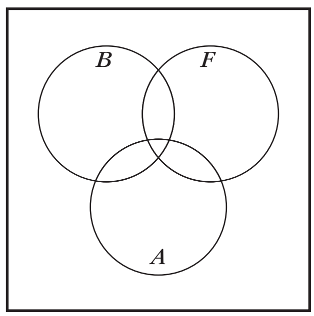


j.



V. *Con base en la información siguiente, resuelve los ejercicios que se presentan a continuación*

En un club que consta de 150 socios hay:



- 20 socios que practican beisbol, futbol y atletismo.
- 25 que practican beisbol y atletismo.
- 30 que practican futbol y atletismo.
- 40 que practican beisbol y futbol.
- 100 que practican futbol.
- 60 que practican beisbol.
- 40 que practican atletismo.

Halla:

38. El número de socios que no practican ningún deporte.

a. 15 *b.* 25 *c.* 20 *d.* 30

39. El número de socios que sólo practican beisbol.

a. 15 *b.* 25 *c.* 50 *d.* 5

40. El número de socios que sólo practican futbol.

a. 15 *b.* 25 *c.* 50 *d.* 5

VI. *Resuelve los ejercicios siguientes a partir de esta información.*

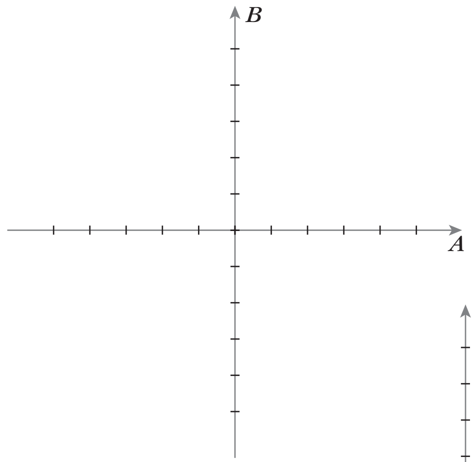
Dados los conjuntos $A = \{-3, 0, 2\}$ y $B = \{-1, 0, 4\}$

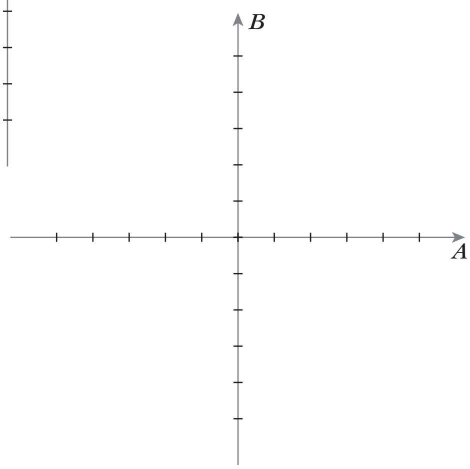
41. Halla $A \times B$

42. Halla $B \times A$

43. Marca en un sistema de coordenadas los pares ordenados de $A \times B$.

44. Marca en un sistema de coordenadas los pares ordenados de $B \times A$.





2

Sistemas de numeración

La numeración es la rama de las matemáticas que estudia la representación, formación y expresión de los números.

Para representar y formar números se utiliza un conjunto de reglas y símbolos o numerales, que en conjunto constituyen lo que se denomina *sistema de numeración*.

A lo largo de la historia, ante la necesidad de contar, los seres humanos han inventado diversos sistemas de numeración, tales como el

- Babilónico
- Egipcio
- Romano
- Maya
- Decimal
- De base dos o binario
- De base tres o terciario

Como sabes, nosotros utilizamos el sistema decimal y para comprenderlo mejor y valorar sus ventajas respecto a otros sistemas, en este capítulo estudiaremos las características, los símbolos y los principios que utilizan diversos sistemas, como el egipcio, el maya, el romano y otros de base diferente de 10.

Características y principios de los sistemas de numeración

Los sistemas de numeración tienen ciertas características y propiedades comunes a todos ellos, así como otras que los diferencian entre sí, lo cual permite clasificarlos.

Gracias al conocimiento de estas características y propiedades podemos mejorar la comprensión de los métodos para efectuar operaciones como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división entre números. Esos métodos reciben el nombre de *algoritmos*.

Principio repetitivo

La cantidad de símbolos básicos que utilizan los diferentes sistemas de numeración para formar y representar números (motivo por el cual también se les denomina *numerales*) es finita; sin embargo, la cantidad de números que pueden escribirse o simbolizarse es infinita. Por ello, todos los sistemas de numeración requieren a veces utilizar el mismo símbolo más de una vez.

Por ejemplo, en el sistema de numeración egipcio el número | se representaba mediante una raya vertical, el 10 con el numeral ∩, el 100 con 𓍢. Luego, los números 9, 90 y 900 se representaban de la manera siguiente:

9 = |||||||||

90 = ∩∩∩∩∩∩∩∩∩

900 = 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢

Los egipcios repetían un mismo símbolo hasta nueve veces. Esta característica de los sistemas de numeración se llama *principio repetitivo*.

En algunas culturas, en vez de repetir un símbolo hasta nueve veces, como los egipcios, se inventaron símbolos intermedios, como sucede en el sistema maya.

Para representar el número 1 los mayas utilizaban el símbolo •; para el 5 usaban una raya horizontal, —. Entonces, el número 8 se representaba así:

•••
— 5 + 3 = 8

Principio aditivo

El principio aditivo es común a todos los sistemas de numeración y consiste en que un número que se forma por medio de un conjunto de símbolos o numerales es la suma de los números que cada símbolo o numeral representa. Veamos algunos ejemplos para comprender mejor este principio.

Como hemos señalado, en el sistema de numeración egipcio los símbolos |, ∩, 𓍢 representan los números 1, 10 y 100, respectivamente. Por tanto, en este sistema el número 285 se representa mediante los símbolos o numerales siguientes:

𓍢	𓍢	∩∩∩∩ ∩∩∩∩	||| ||
↓	↓		
100 +	100 +	80	+ 5

Principio sustractivo

Este principio consiste en restar los valores de dos cifras. Por ejemplo, en el sistema de numeración romano, si el símbolo de un número precede a otro cuyo valor es mayor, entonces el número representado por los dos símbolos es el que resulta de restar el menor del mayor. Por ejemplo, los numerales romanos X y L equivalen a 10 y a 50 del sistema decimal, respectivamente; luego, el número romano XL es igual al número decimal 40.

$$\begin{array}{cc} X & L = 50 - 10 = 40 \\ \downarrow & \downarrow \\ 10 & 50 \end{array}$$

Los romanos únicamente utilizaron las combinaciones sustractivas siguientes:

IV, IX, XL, XC, CD, CM

Principio multiplicativo

Este principio consiste en representar números por medio de multiplicadores, es decir, factores que aumentan el valor de los números. Por citar un caso, en el sistema de numeración romano una barra horizontal trazada por encima de un número significa que éste se multiplica por 1000 y dos rayas por un millón. Por ejemplo:

$$\overline{\text{IX}} = 9 \times 1000 = 9000$$

$$\overline{\text{X}} = 10\,000$$

$$\overline{\overline{\text{V}}} = 5\,000\,000$$

Gracias a este principio, las culturas pudieron representar una mayor cantidad de números con símbolos básicos de su sistema de numeración.

Principio de posición o de valor relativo

En los sistemas de numeración en los que se utiliza el principio de posición, los símbolos o numerales que se emplean para representar números no tienen un valor único, sino que éste depende del lugar donde esté colocado respecto a un punto de referencia. Por ejemplo, en el sistema decimal los símbolos 666 representan el número $6 \times 100 + 6 \times 10 + 6$; en otras palabras, el valor del símbolo 6 depende de su colocación.

$$\begin{array}{ccc} 6 & 6 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 600 & 60 & 6 \end{array}$$

De acuerdo con lo anterior, en un sistema de numeración de valor relativo, cada símbolo que se utiliza para representar un número tiene dos valores: el absoluto y el relativo.

El valor absoluto de un número es el que tiene su símbolo, mientras que su valor relativo es el que le corresponde según la posición que ocupa su símbolo respecto a un punto de referencia.

Podemos decir que el principio de posición es el principio multiplicativo antes mencionado, con la característica de que los multiplicadores no se simbolizan. Ésa es la razón de su importancia, ya que la ausencia escrita permite la simplificación de la representación numérica y contribuye así a un gran desarrollo de las matemáticas.

Base de un sistema de numeración

En los sistemas de numeración de valor relativo, los multiplicadores son potencias de un número llamado *base* (elegido arbitrariamente), como se indica a continuación:

$$\begin{array}{cccccc} \text{Símbolo} & \text{Símbolo} & \text{Símbolo} & \text{Símbolo} & \text{Símbolo} & \text{Símbolo} \\ b^{n-1} & b^{n-2}\ldots & b^3 & b^2 & b^1 & b^0 \end{array}$$

donde n representa la cantidad de cifras o símbolos básicos y b la base del número de que se trata. Por ejemplo, los multiplicadores de un sistema de numeración de base cuatro son:

$$4^0$$

$$4^1$$

$$4^2$$

$$4^3$$

Todo sistema de numeración moderno de base b consta de b símbolos básicos para formar números; por citar algunos casos:

- Los símbolos básicos del sistema de base dos o binario son 0 y 1.

- Los símbolos básicos del sistema de base tres o terciario son 0, 1 y 2.
- Los símbolos básicos del sistema de base cuatro o cuaternario son 0, 1, 2 y 3.

Cuando la base de un sistema es mayor que 10, entonces la letra *a* representa el número 11, la *b* el 12, la *c* el 13 y así sucesivamente.

De acuerdo con lo anterior, podemos definir la base de un sistema de numeración como el número de unidades de cierto orden que forman una unidad de orden superior. Así, el sistema decimal tiene como base 10, porque 10 unidades de primer orden forman una unidad de segundo orden, la cual recibe el nombre de *decena*; 10 decenas constituyen una unidad de tercer orden, denominada *centena*. La unidad de cuarto orden es el *millar* y equivale a 10 centenas, y así sucesivamente.

Por consiguiente, todo número puede expresarse como una suma de números, cada uno de los cuales es uno de los símbolos básicos multiplicado por una potencia de la base, según la colocación que tenga respecto a un punto de referencia. En el sistema decimal, el punto de referencia es el denominado *punto decimal*.

Ejemplo 1

Si el símbolo 83 460 representa un número de base 10, escríbelo como la suma de otros números.

Solución

En este caso, la cantidad de numerales n empleados para formar el número es $n = 5$, de manera que $n - 1 = 4$; por tanto

Numerales:	8	3	4	6	0
	↓	↓	↓	↓	↓
Multiplicadores:	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Luego:

$$\begin{aligned} 83\,460 &= 8 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 0 \times 10^0 \\ &= 80\,000 + 3000 + 400 + 60 + 0 \end{aligned}$$

Cuando un número se expresa como la suma de múltiplos de la base, entonces está escrito en forma desarrollada o polinomial.

Ejemplo 2

Halla el número decimal equivalente al número 7546 de base seis.

Solución

Aquí $n = 4$
$n - 1 = 3$;

Numerales:	7	5	4	6
	↓	↓	↓	↓
Multiplicadores:	6^3	6^2	6^1	6^0

Luego:

$$\begin{aligned} 7546^6 &= 7 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 6 \times 6^0 \\ &= 7 \times 216 + 5 \times 36 + 24 + 6 \times 1 \\ &= 1\,512 + 180 + 24 + 6 \\ &= 1\,722 \\ 7546^6 &= 1\,722 \end{aligned}$$

Para señalar el sistema en que está escrito un número, se coloca abajo y a la derecha de ella un número pequeño, llamado *subíndice*, que representa la base. Si un número no lleva subíndice, su base es 10. Así, la base de los números $11\,001_2$, $101\,121_3$, $231\,011$ son 2, 3 y 10, respectivamente.

Ejemplo 3

Halla el número decimal equivalente a $101\,000\,110_2$.

Solución

Aquí $n = 9$, así que $n - 1 = 8$.

La base del sistema es 2; por tanto, los multiplicadores correspondientes a cada uno de sus símbolos son:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Numerales:} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{Multiplicadores:} & 2^8 & 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0
\end{array}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
101\,000\,110_2 &= 1(2^8) + 0(2)^7 + 1(2)^6 + 0(2)^5 + (0)2^4 + 0(2)^3 + 1(2)^2 + 1(2)^1 + 0(2)^0 \\
&= 256 + 0 + 64 + 0 + 0 + 0 + 4 + 2 + 0 \\
&= 256 + 64 + 4 + 2 \\
&= 326 \\
101\,000\,110_2 &= 326
\end{aligned}
$$

Observa que en ejemplo 3 hemos usado los paréntesis en vez del aspa $\times$ para indicar una multiplicación. Por convención, en álgebra se prefiere el uso de paréntesis o punto $\cdot$ en vez de $\times$ para indicar una multiplicación; en este texto adoptaremos tal convención.

El sistema de base dos, llamado *binario*, es uno de los más importantes debido a sus múltiples aplicaciones en el campo de la computación, la transmisión de señales de radio y la electrónica, entre otras. Como ya habíamos señalado, sus símbolos básicos son 0 y 1.

Ahora aprenderemos un método para que, dado un número escrito en el sistema decimal, se halle su equivalente en otro sistema.

Para convertir un número escrito en el sistema decimal en otro número escrito en otro sistema:

1. Se dividen el número y sus cocientes sucesivos entre la base del sistema en el que se quiere expresar, hasta obtener un cociente menor que dicha base.
2. El número buscado se forma escribiendo el último cociente y a su derecha todos los residuos de las divisiones. Los residuos se colocan de uno en uno, aunque sean ceros, en el orden siguiente:

   último cociente $\rightarrow$ último residuo $\rightarrow$ penúltimo residuo $\cdots$ primer residuo

En el ejemplo 4 se muestra este proceso.

Ejemplo 4

a. Convierte 4758 al sistema de base 5 o quinario.

Solución

$$
\begin{array}{ccccc}
951 & 190 & 38 & 7 & \boxed{1} \\
5\,\overline{)4758} & 5\,\overline{)951} & 5\,\overline{)190} & 5\,\overline{)38} & 5\,\overline{)7} \\
25 & 45 & 40 & \boxed{3} & \boxed{2} \\
08 & 01 & \boxed{0} & & \\
\boxed{3} & \boxed{1} & & &
\end{array}
$$

(1 es menor que 5 y aquí termina el proceso de las divisiones.)

De acuerdo con lo anterior:

$$4758 = 123013_5$$

Comprobación

$$4758 = 1(5^5) + 2(5^4) + 3(5^3) + 0(5^2) + 1(5) + 3(5^0)$$
$$4758 = 3125 + 1250 + 375 + 0 + 5 + 3$$
$$4758 = 4758$$

b. Convierte 147 al sistema binario.

Solución

$$\begin{array}{ccccccc} 73 & 36 & 18 & 9 & 4 & 2 & \boxed{1} \\ 2\,\overline{)147} & 2\,\overline{)73} & 2\,\overline{)36} & 2\,\overline{)18} & 2\,\overline{)9} & 2\,\overline{)4} & 2\,\overline{)2} \\ 07 & 13 & 16 & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & & \boxed{1} & & \end{array}$$

(1 es menor que 2 y aquí termina el proceso de las divisiones.)

De acuerdo con lo anterior,

$$147 = 10010011_2$$

Comprobación

Numerales:	1	0	0	1	0	0	1	1
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Multiplicadores:	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$147 = 1(2^7) + 0(2^6) + 0(2^5) + 1(2^4) + 0(2^2) + 1(2) + 1(1)$$
$$147 = 128 + 0 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1$$
$$147 = 147$$

Es importante señalar que cuando un residuo es mayor que 9 se coloca en su lugar la letra correspondiente, es decir:

- *a* si el residuo es 10
- *b* si el residuo es 11
- *c* si el residuo es 12, y así sucesivamente

Si se requiere convertir un número escrito de un sistema no decimal a otro, también no decimal, primero se convierte al sistema decimal y a continuación al sistema en que se quiere escribir dicho número.

Ejemplo 5

Convierte el número 846_7 al sistema de base 3.

Solución

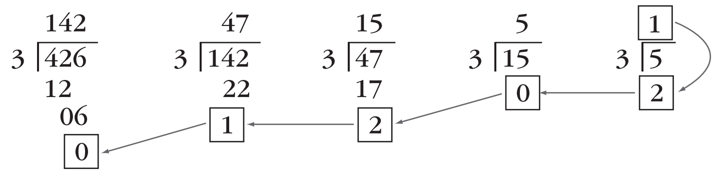
Paso 1: convierte 846_7 al sistema decimal.

Numerales:	8	4	6
$n - 1 = 2$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Multiplicadores:	7^2	7^1	7^0

Luego:

$$846_7 = 8(7)^2 + 4(7)^1 + 6(7)^0$$
$$846_7 = 392 + 28 + 6$$
$$846_7 = 426$$

Paso 2: convierte 426 al sistema ternario (base 3).



Verifica que:

$$426 = 120210_3$$

luego:
$$846_7 = 120210_3$$

Ejercicios 1

I. *Relaciona correctamente las columnas.*

( ) **1.** Conjunto de reglas y símbolos que se utilizan para formar y representar números.

( ) **2.** Principio según el cual el número representado por un conjunto de símbolos es la suma de los números que cada símbolo representa.

( ) **3.** Principio que consiste en restar los valores de dos cifras.

( ) **4.** Principio que consiste en afectar los símbolos básicos o numerales de un sistema de numeración con multiplicadores que aumentan su valor.

( ) **5.** Principio según el cual el valor de un número está determinado por la posición que éste ocupa respecto a un punto de referencia.

( ) **6.** Tipos de sistemas de numeración que utilizan el principio de posición.

( ) **7.** Valor que tiene un número por su símbolo o numeral.

( ) **8.** Valor que tiene un número por la posición que ocupa respecto a un punto de referencia.

( ) **9.** Número de unidades de cierto orden que forman una unidad de orden superior.

( )**10.** Nombre que recibe el sistema de numeración de base dos.

( )**11.** Nombre que recibe el sistema de numeración de base tres.

( )**12.** Nombre que recibe el sistema de numeración de base 10.

a. Principio aditivo

b. Sistema binario

c. Valor absoluto

d. Sistema decimal

e. Sistema ternario

f. Base de un sistema de numeración

g. Principio sustractivo

h. Sistema de numeración

i. Sistema de valor relativo

j. Valor relativo

k. Principio multiplicativo

l. Principio de posición

II. *Encuentra el equivalente del sistema decimal de cada uno de los números de base diferente de 10 que se indican.*

13. 420_5
a. 120
b. 110
c. 118
d. 125

110

17. $10\,323_4$
a. 315
b. 350
c. 295
d. 320

315

14. 3152_7
a. 1215
b. 1125
c. 1095
d. 1115

1115

18. $124\,706_8$
a. 43 452
b. 43 582
c. 43 462
d. 41 414

43 462

15. 34052_6
a. 4784
b. 5286
c. 4578
d. 4652

4784

19. $2\,012\,101_3$
a. 1603
b. 1807
c. 1405
d. 1634

1603

16. $1100\,10110_2$
a. 418
b. 398
c. 406
d. 402

406

20. $102\,458_9$
a. 62 516
b. 58 416
c. 60 518
d. 60 884

60 884

III. *Escribe los números siguientes del sistema decimal en el sistema de numeración indicado.*

21. 50 en el sistema cuaternario (base 4)
a. 312_4
b. 232_4
c. 302_4
d. 322_4

3024

22. 947 en el sistema ternario
a. $2\,022\,012_3$
b. $1\,002\,002_3$
c. $1\,202\,002_3$
d. $1\,022\,002_3$

$1\,022\,002_3$

23. 1645 en el sistema de base 8

a. 3155_8
b. 3245_8
c. 4255_8

3155_8

24. 1124 en el sistema de base 5

a. $143\,44_5$
b. $13\,444_5$
c. $413\,44_5$
d. $13\,432_5$

$13\,444_5$

25. 1425 en el sistema de base 7

a. 4104_7
b. 4304_7
c. 4204_7
d. 4314_7

4104_7

26. 874 en el sistema de base 6

a. 4014_6
b. 5014_6
c. 4104_6
d. 3514_6

4014_6

27. 2700 en el sistema de base 9

a. 6330_9
b. 7530_9
c. 3630_9
d. 4630_9

3630_9

28. 249 en el sistema binario

a. $11\,110\,011_2$
b. $10\,111\,001_2$
c. $11\,110\,101_2$
d. $11\,111\,001_2$

$11\,111\,001_2$

IV. *Efectúa estas conversiones.*

29. Convierte el número 1021_3 al sistema binario.

a. $101\,010_2$
b. $100\,110_2$
c. $100\,001_2$
d. $100\,010_2$

30. Convierte el número 782_9 al sistema de base 5.

a. $13\,031_5$
b. $20\,041_5$
c. $10\,031_5$
d. $20\,031_5$

31. Convierte el número $302\,132_4$ al sistema de base 7.

a. $12\,263_7$
b. $62\,253_7$
c. $12\,463_7$
d. $21\,263_7$

32. Convierte el número $20\,321_6$ al sistema de base 8.

a. 6231_8
b. 5231_8
c. 2531_8
d. 5237_8

Sistema de numeración egipcio

Los símbolos básicos o numerales del sistema de numeración egipcio y sus expresiones equivalentes en el sistema decimal se muestran en la tabla 1.

El sistema de numeración egipcio tiene las características siguientes:

- Sus símbolos o numerales son jeroglíficos.
- Utiliza el principio repetitivo para representar números entre 1 y la base, que es 10, y entre potencias de la base.
- El orden en el que aparecen los símbolos no importa; esto significa que no se trata de un sistema posicional.
- Para determinar el número que corresponde a un conjunto de símbolos se utiliza el principio aditivo.

Tabla 1 *Numerales egipcios*

Sistema decimal	*Sistema egipcio*	*Descripción*
1	𓏺	Un bastón (raya vertical)
10	𓎆	Talón (arco)
100	𓍢	Un rollo (enrollado)
1000	𓆼	Una flor de loto
10 000	𓂭	Un dedo señalando
100 000	𓆐	Un pez (renacuajo)
1 000 000	𓁨	Un hombre asombrado

En seguida se presentan algunos ejemplos del sistema de numeración egipcio.

Ejemplo 6

Escribe el número del sistema decimal equivalente a los numerales egipcios siguientes:

a. 𓆼 𓎆 𓎆 | | |
𓍢 𓍢 𓂭 𓁨
𓆐

Solución

$$\begin{array}{rr} & 1000 \\ & 20 \\ & 3 \\ + & 200 \\ & 10\ 000 \\ & 100\ 000 \\ & 1\ 000\ 000 \\ \hline & 1\ 111\ 223 \end{array}$$

b. 𓍢 𓍢 𓍢 𓎆 𓎆 𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺
𓎆 𓎆 𓎆 𓏺𓏺𓏺
𓎆 𓎆

Solución

𓍢 = 100; luego 𓍢 𓍢 𓍢 = 300

𓎆 = 10; luego 𓎆 𓎆 𓎆
𓎆 𓎆 𓎆 = 80
𓎆 𓎆

𓏺 = 1; luego 𓏺𓏺𓏺𓏺
𓏺𓏺𓏺 = 7

Por tanto, el número equivalente en el sistema decimal es 387.

c. Escribe el número 1524 en el sistema de numeración egipcio.

Solución

𓆼 𓍢 𓍢 𓍢 𓎆 𓎆 𓏺𓏺
𓍢 𓍢 𓏺𓏺

Ejercicios 2

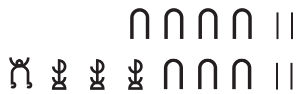
I. *Halla el número decimal que corresponde a los siguientes numerales del sistema de numeración egipcio.*

1. 𓎆 𓎆 𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺 𓍢 𓍢

2. 𓆼 𓆼 𓍢 𓍢 𓎆 𓎆
𓎆 𓎆

3. 𓏺𓏺
𓁨 𓎆 𓎆 𓎆 𓍢 𓆼
𓆐 𓂭 𓂭 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢

4.



Sistema de numeración maya

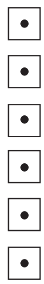
Los mayas crearon un sistema de numeración que tiene estas características:

- Su sistema es posicional y su base es 20.
- Sus símbolos básicos son:

↓ ↓ ↓

0 1 5

- La repetición de los símbolos • y —— se interpretaba conforme el principio aditivo.
- Para representar un número se utilizaba la escritura vertical (de abajo arriba), en la que el símbolo • tiene los valores relativos siguientes:

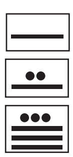


$$1(18)(20)^4 = 2\ 880\ 000$$
$$1(18)(20)^3 = 144\ 000$$
$$1(18)(20)^2 = 7\ 200$$
$$1(18)(20) = 360$$
$$1(20) = 20$$
$$1(20)^0 = 1$$

Observa que la unidad de tercer orden es 18(20) en lugar de $(20)^2$, lo que tal vez se debe a que el calendario solar de los antiguos mayas constaba de 360 días por año ($18 \times 20 = 360$), así que utilizaron ese número para establecer esta unidad de orden.

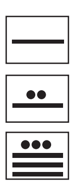
Ejemplo 7 Escribe el número del sistema decimal equivalente a los numerales mayas siguientes:

a.



Solución

luego:



$\longrightarrow$ 5 $\longrightarrow$ $5 \times 18 \times 20 = 1800$

$\longrightarrow$ 7 $\longrightarrow$ $7 \times 20 = 14$

$\longrightarrow$ 18 $\longrightarrow$ $18 \times 20^0 = 18$

$$1\,958$$

b. 

Solución

		luego:
$\longrightarrow$ 1	$\longrightarrow$	$1(18)(20)^3 = 144\,000$
$\longrightarrow$ 10	$\longrightarrow$	$10(18)(20)^2 = 72\,000$
$\longrightarrow$ 18	$\longrightarrow$	$18(18)(20) = 6480$
$\longrightarrow$ 7	$\longrightarrow$	$7 \times 20^1 = 140$
$\longrightarrow$ 0	$\longrightarrow$	$0 \times 20^0 = 0$
		$222\,620$

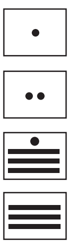
Ejercicios 3

I. *Escribe el número del sistema decimal equivalente a cada uno de los numerales del sistema de numeración maya.*

1. 

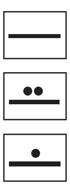
a. 784
b. 776
c. 736
d. 706

736

2. 

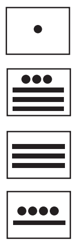
a. 8 255
b. 8 455
c. 8 175
d. 8 245

8 255

3. 

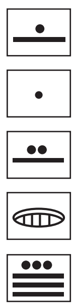
a. 1 946
b. 2 036
c. 1 752
d. 1 826

1 946

4. 

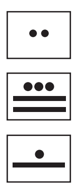
a. 13 809
b. 13 629
c. 13 419
d. 13 989

13 989

5. 

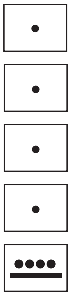
a. 873 738
b. 387 387
c. 783 837
d. 738 873

873 738

6. 

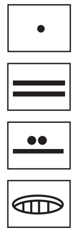
a. 906
b. 876
c. 956
d. 986

986

7. 

a. 164 209
b. 165 219
c. 151 589
d. 157 479

151 589

8. 

a. 11 830
b. 10 940
c. 10 760
d. 10 850

10 940

Sistema de numeración romano

El sistema de numeración romano tiene las características siguientes:

- Sus símbolos básicos son:

I	V	X	L	C	D	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	5	10	50	100	500	1000

- Es un sistema aditivo, donde un número es la suma de los números representados por cada uno de sus símbolos o numerales.
- Utiliza el principio multiplicativo, ya que una raya colocada arriba de un símbolo significa que el número que representa se multiplica por 1000 y dos rayitas arriba indican que se multiplica por un millón.
- Si a la derecha de un símbolo se escribe otro símbolo que sea igual o menor que el número que representa, el número significa la suma de ellos. Por ejemplo:

$$XV = X + V = 10 + 5 = 15$$
$$CX = C + X = 100 + 10 = 110$$
$$CC = C + C = 100 + 100 = 200$$

- Si a la izquierda de un número romano se coloca otro menor valor, éste se resta del mayor. Por ejemplo:

$$IV = V - I = 5 - 1 = 4$$
$$XC = C - X = 100 - 10 = 90$$

- Nunca se escriben más de tres números romanos iguales seguidos a la derecha de otra cifra mayor, ni aislada, ni más de uno a la izquierda. Por ejemplo:

El número 4 romano no se escribe IIII, sino IV.

El número 80 romano no se escribe XXC, sino LXXX.

Ejercicios 4

I. *Escribe los números siguientes del sistema decimal en el sistema de numeración romano.*

1. 420 =

2. 1 796 =

3. 3 209 =

4. 5 840 =

5. 10 934 =

8. 3789 =

6. 8040 =

9. 10 449 =

7. 2594 =

10. 50 074 =

II. *Escribe los números romanos siguientes en sistema decimal.*

11. MCLIII =

16. MXCVII =

12. CDLIX =

17. DCCXXXV =

13. CCLIV =

18. MMCMXCIX =

14. MCMLXXIV =

19. $\overline{\mathrm{V}}\mathrm{CDLIX}$ =

15. MMCDIX =

20. $\overline{\overline{\mathrm{V}}}\overline{\mathrm{CCL}}\mathrm{CIX}$ =

Sistema de numeración babilónico

Los babilonios elaboraron un sistema de numeración que tiene las características siguientes:

- Era un sistema de valor relativo modificado, ya que no tenía un símbolo para el cero.
- Su base era 60.
- Sus símbolos básicos eran:

$<$ que equivale al número 10 del sistema decimal.

∇ que representaba el número 1.

Estos símbolos se usaban repetidamente para representar números hasta el 60.

Ejemplo 8

Halla el número del sistema decimal equivalente a los numerales siguientes del sistema de numeración babilónico:

$\nabla\nabla$	$<\ \nabla\nabla$	$<\ \nabla\nabla$	∇
	$<\ \nabla$	$<$ $<$	

Solución

∇∇	< ∇∇	< ∇∇	∇
	< ∇	< <	
↓	↓	↓	↓
$2(60)^3$	+	+	+
= 432 000	$23(60)^2$	32(60)	$1(60)^0$
= 516 721	82 800	1920	1

Ejercicios 5

I. *Halla el número del sistema decimal equivalente a los números siguientes del sistema babilónico.*

1.

<	∇∇∇	< ∇∇
∇	∇∇∇	< ∇
∇	∇∇∇	< ∇∇

a. 43 775
b. 38 960
c. 57 500

43 775

2.

<	< ∇	< ∇∇
	< ∇	∇∇
	< ∇	∇∇

a. 48 450
b. 35 800
c. 39 492
d. 37 996

37 996

3.

<	∇∇∇	< ∇∇
∇	∇∇∇	< ∇

a. 39 650
b. 36 741
c. 39 983
d. 34 642

39 983

Sistema decimal

El sistema decimal fue inventado por los indios (llamados también *hindúes*), divulgado por los árabes y tiene las características siguientes:

- Es un sistema posicional o de valor relativo de base 10, cuyos símbolos básicos o cifras son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- El 1 es su unidad de primer orden.

- Diez unidades de primer orden forman una unidad de segundo orden, la cual recibe el nombre de *decena* (1 decena = 10 unidades).
- La unidad de tercer orden se llama *centena* y es igual a 10 decenas; es decir, es igual a 100 unidades.
- 10 centenas forman una unidad de cuarto orden, la cual se llama *millar*, y es igual a 10 centenas, o sea, 1000 unidades.
- 10 unidades de millar forman una unidad de quinto orden, la cual se denomina *decena de millar* (1 decena de millar = 10 × 1000 unidades = 10 000 unidades).
- La unidad de sexto orden recibe el nombre de *centena de millar* (1 centena de millar = 10 decenas de millar = 100 000 unidades).
- La unidad de séptimo orden es el *millón*, y así sucesivamente.

La agrupación de tres unidades de orden forma una *clase* y la de dos clases se llama *periodo*, como se muestra a continuación.

$$\text{Clase de las unidades} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades} \\ \text{decenas} \\ \text{centenas} \end{array} \right.$$

$$\text{Clase de los millares} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades de millar} \\ \text{decenas de millar} \\ \text{centenas de millar} \end{array} \right.$$

$$\text{Clase de los millones} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades de millón} \\ \text{decenas de millón} \\ \text{centenas de millón} \end{array} \right.$$

$$\text{Clase de los millares de millón} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades de millar de millón} \\ \text{decenas de millar de millón} \\ \text{centenas de millar de millón} \end{array} \right.$$

$$\text{Clase de los billones} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades de billón} \\ \text{decenas de billón} \\ \text{centenas de billón} \end{array} \right.$$

$$\text{Periodo de las unidades} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{clase de las unidades} \\ \\ \text{clase de los millares} \end{array} \right.$$

$$\text{Periodo de los millones} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{clase de los millones} \\ \\ \text{clase de los millares de millón} \end{array} \right.$$

$$\text{Periodo de los billones} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{clase de los billones} \\ \\ \text{clase de los millares de millón} \end{array} \right.$$

Estas agrupaciones se pueden formar sucesivamente.

El sistema decimal también consta de las unidades de suborden siguientes:

Décima: si una unidad de primer orden se divide en 10 partes iguales, cada una recibe el nombre de *décima*. Las décimas constituyen las unidades de primer suborden

$$1 \text{ décima} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

Centésima: son las unidades de segundo suborden y se obtienen al dividir una décima en 10 partes iguales, es decir, una unidad de primer orden en 100 partes iguales

$$1 \text{ centésima} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

Milésima: son las unidades de tercer suborden y se obtienen al dividir una centésima en 10 partes iguales, es decir, una unidad de primer orden en 1000 partes iguales.

$$1 \text{ milésima} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

Las unidades de suborden cuarto, quinto, etcétera, van obteniéndose de manera sucesiva.

Escritura de un número en el sistema decimal

En el sistema decimal, para representar un número se colocan en el lugar correspondiente las cifras que representan sus diferentes unidades de orden, como se indica a continuación.

Así hasta el infinito

↑

Unidades de trillón	
Centenas de millar de billón	
Decenas de millar de billón	
Unidades de millar de billón	
Centenas de billón	
Decenas de billón	
Unidades de billón	
Centenas de millar de millón	
Decenas de millar de millón	
Unidades de millar de millón	
Centenas de millón	
Decenas de millón	
Unidades de millón	
Centenas de millar	
Decenas de millar	
Unidades de millar	
Centenas	
Decenas	
Unidades	
Punto decimal	.
Décimas	
Centésimas	
Milésimas	
Diezmilésimas	

En caso de que un número carezca de una o varias unidades de orden se coloca el cero en el lugar correspondiente. Asimismo, si tiene unidades de suborden, éstas se escriben a la derecha del punto decimal, el cual se coloca a la derecha de las unidades de primer orden.

El punto decimal es el punto de referencia que determina el valor relativo de una cifra.

En la tabla 2 se muestran los valores relativos para los números en el sistema decimal.

Tabla 2. *Valores relativos (según su posición) de los números en el sistema decimal.*

10^{-3}	0.001 (1 milésima)
10^{-2}	0.01 (1 centésima)
10^{-1}	0.1 (1 décima)
10^{0}	1 (unidad de primer orden)
10^{1}	10 (decena)
10^{2}	100 (centena)
10^{3}	1000 (millar)
10^{4}	10 000 (decena de millar)
10^{5}	100 000 (centena de millar)
10^{6}	1 000 000 (millón)
10^{7}	10 000 000 (decena de millón)
10^{8}	100 000 000 (centena de millón)
10^{9}	1 000 000 000 (millar de millón)
10^{10}	10 000 000 000 (decena de millares de millón)
10^{11}	100 000 000 000 (centena de millares de millón)
10^{12}	1 000 000 000 000 (billón)

Ejemplo 9

Escribe los números siguientes del sistema decimal.

a. Setecientos cuatro millones, cuatrocientos ochenta mil doscientos nueve unidades

Solución

$$\text{Clase de los millones} \quad \begin{cases} 7 \text{ centenas} \\ 0 \text{ decenas} \\ 4 \text{ unidades} \end{cases}$$

$$\text{Clase de los millares} \quad \begin{cases} 4 \text{ centenas} \\ 8 \text{ decenas} \\ 0 \text{ unidades} \end{cases}$$

$$\text{Clase de las unidades} \quad \begin{cases} 2 \text{ centenas} \\ 0 \text{ decenas} \\ 9 \text{ unidades} \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, la representación escrita del número del sistema decimal setecientos cuatro millones, cuatrocientos ochenta mil doscientos nueve unidades, es el numeral:

704 480 209

b. Trescientos cuarenta y dos mil seiscientos ocho millones, quinientos setenta mil siete unidades

Solución

$$\text{Clase de los millares de millones} \quad \begin{cases} 3 \text{ centenas} \\ 4 \text{ decenas} \\ 2 \text{ unidades} \end{cases}$$

$$\text{Clase de los millones} \quad \begin{cases} 6 \text{ centenas} \\ 0 \text{ decenas} \\ 8 \text{ unidades} \end{cases}$$

$$\text{Clase de los millares} \quad \begin{cases} 5 \text{ centenas} \\ 7 \text{ decenas} \\ 0 \text{ unidades} \end{cases}$$

$$\text{Clase de las unidades} \quad \begin{cases} 0 \text{ centenas} \\ 0 \text{ decenas} \\ 7 \text{ unidades} \end{cases}$$

La representación del número que nos ocupa es:

342 608 570 007

Lectura de un número del sistema decimal

Para leer un número decimal, se leen sucesivamente las cifras que representan las diferentes órdenes de unidades empezando por las superiores. La lectura se facilita si las cifras que forman el número se dividen en grupos de seis, comenzando por la derecha del punto decimal o del lugar que le corresponde, en caso de que no esté escrito (porque el número no tiene parte decimal). Para representar dicha división, el número 1 se coloca abajo y a la derecha de la primera cifra del segundo grupo, de derecha a izquierda, el número 2 abajo y a la derecha del tercer grupo, y así sucesivamente, como se indica en seguida.

$$9\,863_{2}\,475\,900_{1}\,123$$

A continuación, cada grupo de seis cifras se subdivide en dos grupos de tres, colocando comas entre la tercera y cuarta cifras de cada grupo.

Una vez realizado lo anterior, se efectúa la lectura pronunciando la palabra trillón(es) donde hay un 3, billón(es) donde hay un 2, millón(es) donde hay un 1 y mil(es) donde haya una coma. Si el número tiene unidades de suborden, éstas se leen después de leer la parte entera y se le da el nombre de la última unidad de suborden.

Ejemplo 10

Lee el número 148 845 765 106 320 902.863

Solución

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, las comas y los números indican la formación de grupos de seis cifras y la división de éstos en dos grupos de tres.

Para leer el número lo escribimos de la manera siguiente:

148 845, 765 106, 320, 902.863
2 1

El número se lee así: "Ciento cuarenta y ocho mil ochocientos cuarenta y cinco billones, setecientos sesenta y cinco mil ciento seis millones, trescientos veinte mil novecientos dos unidades y ochocientos sesenta y tres milésimas".

Ejercicios 6

I. *Escribe los números del sistema decimal que se indican a continuación:*

1. Veinte mil cuatrocientos siete unidades y cuatro décimas.

2. Trescientos cuarenta y seis mil, sesenta y ocho unidades y catorce centésimas.

3. Cinco millones, ciento ocho mil trescientos cincuenta y dos unidades y ciento setenta y cinco milésimas.

4. Setecientos treinta millones, ochocientos doce mil quinientos dos unidades y seis centésimas.

5. Diez billones, ciento ocho mil novecientos seis millones, trescientos veintiséis mil cuatro unidades y siete milésimas.

6. Mil cuatrocientos billones, cuarenta y un millones, nueve mil doscientos tres unidades y cuarenta y ocho diezmilésimas.

II. *Lee los números siguientes del sistema decimal. Escribe tu lectura:*

7. 742.

8. 7642.8.

9. 45 217.06

10. 275 305.002

11. 13 546 714.0128

12. 108 042 109.3651

III. *Efectúa las operaciones siguientes.*

13. ( ) 1036.173 + 289.04
a. 1315.113
b. 1325.213
c. 1324.213
d. 1346.743

1325.213

14. ( ) 1.032 + 3.07 + 0.987
a. 4.089
b. 5.189
c. 6.189
d. 5.089

5.089

15. ( ) 1 046.8 − 639.14
a. 407.66
b. 409.66
c. 489.74
d. 406.66

407.66

16. ( ) 3.972 − 2.04
a. 1.942
b. 1.976
c. 2.013
d. 1.932

1.932

17. ( ) 61.2 × 0.14
a. 8.904
b. 8.504
c. 8.568
d. 8.704

8.568

18. ( ) 0.0154 × 0.04
a. 0.000616
b. 0.000826
c. 0.00616
d. 0.0000616

0.000616

19. ( ) 36.4 ÷ 0.07
a. 52
b. 5200
c. 5.2
d. 520

520

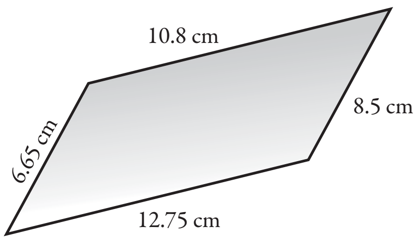
20. ( ) 0.562 ÷ 0.005
a. 112.4
b. 11 240
c. 11.24
d. 1124

112.4

IV. *En los ejercicios siguientes escribe en el recuadro el inciso que corresponde a la respuesta correcta.*

21. Calcula el perímetro del cuadrilátero siguiente:

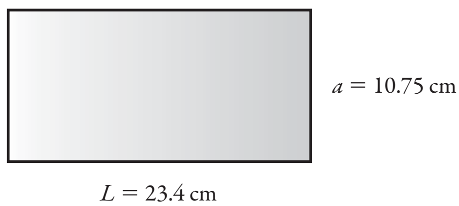
a. 41.65 cm
b. 38.70 cm
c. 37.80 cm
d. 39.65 cm



39.65 cm

22. Calcula el área del rectángulo de la figura siguiente.

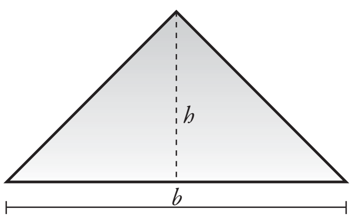
a. 251.55 cm²
b. 246.75 cm²
c. 256.5 cm²
d. 249.65 cm²



251.55 cm²

23. Calcula el área del triángulo cuya base mide 16.8 cm y su altura 13.5 cm.

a. 117.6 cm²
b. 113.4 cm²
c. 118.2 cm²
d. 114.4 cm²



113.4 cm²

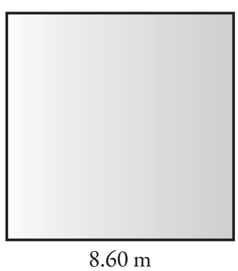
24. Roberto obtuvo las calificaciones siguientes en el examen de matemáticas: 89, 58, 75, 90 y 69. Calcula la media aritmética (promedio) de Roberto en dicha asignatura.

a. 76.2
b. 75
c. 77.4
d. 76.9

76.2

25. Calcula el área de un cuadrado si cada uno de sus lados tiene una longitud de 8.60 m.

a. 68.16 m²
b. 78.56 m²
c. 73.96 m²
d. 75.46 m²



73.96 m²

26. Si una pluma cuesta $6.75, ¿cuánto dinero necesitas para comprar una caja que contiene 16 docenas?
   a. $1 296
   b. $1 418
   c. $1 156
   d. $1 206

$1 296

27. Si después de gastar $950 me quedan $2150, ¿cuánto dinero tenía inicialmente?
   a. $3 100
   b. $3 000
   c. $3 200
   d. $3 150

$3 100

28. Calcula el promedio de las masas siguientes: 23.6 kilogramos (kg), 16.41 kg, 16.21 kg, 20.2 kg y 18.6 kg.
   a. 21 kg
   b. 20 kg
   c. 19.8 kg
   d. 19.0 kg

19.0 kg

29. Bertha hizo una llamada de larga distancia de 45.6 minutos de duración a un costo de $1.50 por minuto. Calcula el costo total de la llamada.
   a. $72.4
   b. $70.0
   c. $68.4
   d. $61.4

$68.4

30. Carmela fue al mercado y gastó $380.6 en carne, $22.50 en papas, $58.75 en verduras, $270.8 en frutas diversas, $75.2 en huevo y $96.85 en frijol. Si pagó con un billete de $1000, ¿de cuánto fue el cambio que le devolvieron?
   a. $86.40
   b. $95.30
   c. $92.50
   d. $96.70

$95.30

31. Me faltan \$23 674.65 para comprar un automóvil cuyo precio es de \$154 420. ¿Cuánto dinero tengo?

a. \$130 749.75

b. \$130 745.35

c. \$132 745.35

d. \$129 845.25

32. Un maestro cobra \$140 por cada hora de asesoría que imparte. ¿Cuántas horas de asesoría debe dar para ganar \$11 900?

a. 80

b. 90

c. 82

d. 85

33. Un avión vuela a 350 kilómetros por hora (km/h). ¿Qué distancia recorrerá en 6 horas? Expresa la distancia en metros.

a. 2 000 000 m

b. 2 100 000 m

c. 2 400 000 m

d. 2 200 000 m

34. El costo de cavar una zanja es de \$31.4 por metro cúbico (m^3). ¿Cuál es el costo de cavar una zanja cuyas dimensiones son $1.5 \times 4.5 \times 3.6$ m.

a. \$763.0

b. \$865.0

c. \$920

d. \$726

35. Una fábrica de chocolates los empaca en cajas que tienen forma de cubo. Si cada arista del cubo mide 10 cm y las dimensiones de cada chocolate son de $4 \times 5 \times 1$ cm, ¿cuántos chocolates caben en cada caja?

a. 50

b. 60

c. 40

d. 55

50

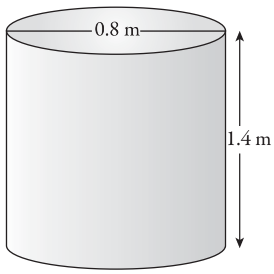
36. Las dimensiones de una caja de naipes son $3 \times 2 \times 0.5$ pulgadas. Si las dimensiones de cada naipe son $3 \times 2 \times 0.01$ pulgadas, ¿cuántos naipes caben en la caja?

a. 20
b. 30
c. 50
d. 40

50

37. Un cilindro de 1.4 m de altura está lleno de desecho líquido. Si el diámetro del cilindro es de 0.8 m, ¿cuál es el volumen del líquido que contiene?

a. 0.703 m^3
b. 0.76 m^3
c. 0.80 m^3
d. 0.794 m^3



0.703 m^3

38. Con base en los datos de la tabla siguiente, determina la marca de paquetes de plumas que ofrece más plumas por menos dinero.

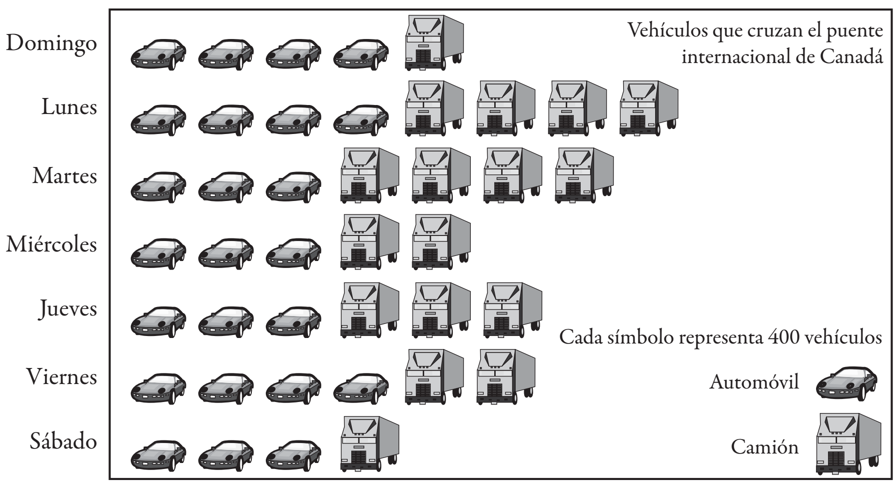
Marca	*Oferta*
Sharpie	14 paquetes por $40.6
Accent	12 paquetes por $33.6
Paper	15 paquetes por $38.25
Pilot	10 paquetes por $26.5

a. Sharpie
b. Accent
c. Paper
d. Pilot

El ejercicio 39 se refiere a la figura, una pictografía, que se muestra a continuación. Una pictografía es una figura que permite comparar cantidades usando símbolos. Cada símbolo representa una cantidad dada de un elemnto particular.

39. (   ) Si los camiones pagaron un peaje de \$80.5 y los autos de \$25.5, ¿cuánto dinero ingresó el martes por concepto de peaje? Haz las operaciones en el espacio en blanco.

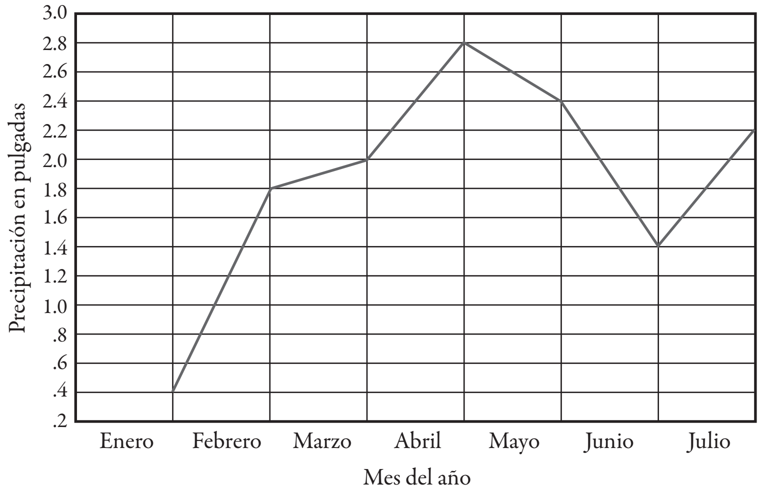
a. \$158 700
b. \$154 200
c. \$159 400
d. \$155 800



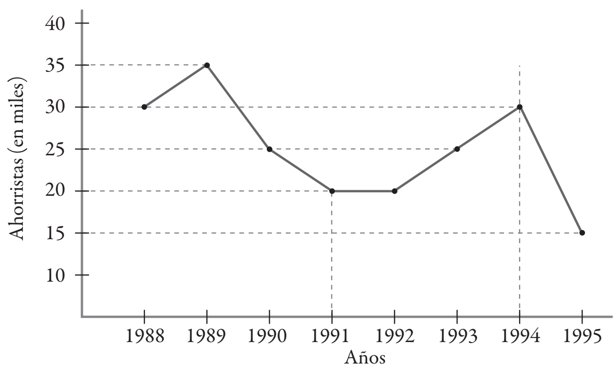
\$159 400

Las gráficas lineales se usan para mostrar tendencias en un periodo detrminado. El ejercicio 40 se refiere a la gráfica lineal siguiente:

40. ( ) Calcula la precipitación mensual promedio, en pulgadas, para los meses de mayo, junio y julio.
    a. 2.2
    b. 2.1
    c. 2.0
    d. 2.3
    e. 1.86



41. ( ) Calcula la cantidad de ahorradores promedio de la caja de ahorro San Rafael, en el periodo 1988−1995.
    a. 25 625
    b. 24 500
    c. 25 000
    d. 26 000



25 000

Evaluación

I. *Escribe en el paréntesis la opción que corresponda a la respuesta correcta.*

1. ( ) Son características del sistema de numeración egipcio, excepto:

a. Utiliza el principio repetitivo

b. Utiliza el principio aditivo

c. No importa el orden en que se representan sus símbolos básicos

d. Es un sistema de numeración posicional

2. ( ) Son características del sistema de numeración romano, excepto:

a. Importa el orden de sus símbolos básicos para representar números

b. Utiliza el principio aditivo

c. Utiliza el principio sustractivo

d. Utiliza el principio multiplicativo

e. Utiliza el principio de valor relativo

3. ( ) Son características del sistema de numeración maya, excepto:

a. Es un sistema posicional o de valor relativo

b. Su unidad de tercer orden es equivalente al número 400

c. La unidad de tercer orden es equivalente al número 360

d. La unidad de cuarto orden es equivalente al número 7200

e. Utiliza los principios aditivo, multiplicativo y posicional

f. Escribe sus números en forma vertical

4. ( ) Son características del sistema decimal, excepto:

a. Su base es 10

b. Es un sistema de valor relativo o posicional

c. El 1 es la unidad de primer orden

d. La décima es la unidad de primer suborden

e. Utiliza el punto decimal para separar las unidades de orden de las de suborden y es el punto de referencia que determina el valor relativo de las cifras o dígitos de un número decimal

f. Las unidades de segundo, tercer, cuarto, quinto, sexto y séptimo órdenes son la decena, centena, millar, decena de millar, centena de millar y millón, respectivamente

g. Utiliza nueve símbolos básicos para representar números

h. La unidad de segundo suborden es la centésima

i. La unidad de tercer suborden es la milésima

j. Las ventajas principales de su uso es que utiliza pocos símbolos básicos, o cifras (10), para representar números y como su base es 10 facilita los cálculos al efectuar operaciones aritméticas

5. ( ) ¿Cuál es el valor relativo de la cifra 8 en el número 7860?

a. 8

b. 80

c. 8000

d. 800

6. ( ) Número del sistema decimal equivalente a los numerales egipcios siguientes

a. 12 556

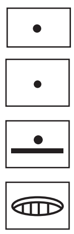
b. 12 006

c. 12 636

d. 12 646

12 646

7. ( ) Número decimal que representan los numerales siguientes del sistema de numeración maya.



a. 7 240

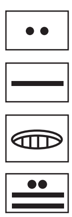
b. 7 940

c. 7 680

d. 8 100

7 680

8. ( ) Número de base 6 equivalente a los numerales mayas siguientes



a. $203\,020_6$

b. $342\,150_6$

c. $241\,315_6$

d. $203\,201_6$

$203\,020_6$

9. ( ) Número equivalente a 1574 en el sistema binario.

a. $10\,100\,110_2$

b. $11\,000\,101_2$

c. $10\,101\,101_2$

d. $11\,000\,100\,110_2$

$211\,000\,100\,110_2$

10. ( ) Número equivalente a 1426_7 en el sistema decimal.

a. 475

b. 568

c. 559

d. 573

559

11. ( ) Número equivalente a 652_7 en el sistema de base 5.

a. 3121_5

b. 1321_5

c. 2311_5

d. 2312_5

2311_5

12. ( ) Halla el número romano equivalente al número decimal 2349.

a. MMCCCXLVIIII

b. MMCCCXXXXVIIII

c. MMCCCXLIX

d. MMCCCXXXXIX

MMCCCXLIX

13. ( ) Halla el número decimal equivalente al número romano $\overline{\text{IV}}$DLXIV.

a. 4544

b. 4564

c. 4566

d. 400 564

4564

14. ( ) Halla el número decimal equivalente al siguiente número babilónico.

∇∇ ∇∇	< ∇∇ < ∇	< ∇	∇∇∇ ∇∇

a. 1 253 465

b. 956 865

c. 947 165

d. 947 465

947 465

II. *Efectúa las operaciones siguientes y escribe en el paréntesis la opción correcta.*

15. ( ) 5.183 + 0.62 + 4.03827 + 7.1

a. 15.98146

b. 16.76127

c. 16.98127

d. 16.94127

16.94127

16. ( ) 16.047 − 13.008

a. 3.039

b. 3.079

c. 2.949

d. 3.029

3.039

17. ( ) 0.23 × 0.004

a. 0.092

b. 0.92

c. 0.00092

d. 0.000092

0.00092

18. ( ) 2.52 ÷ 0.03

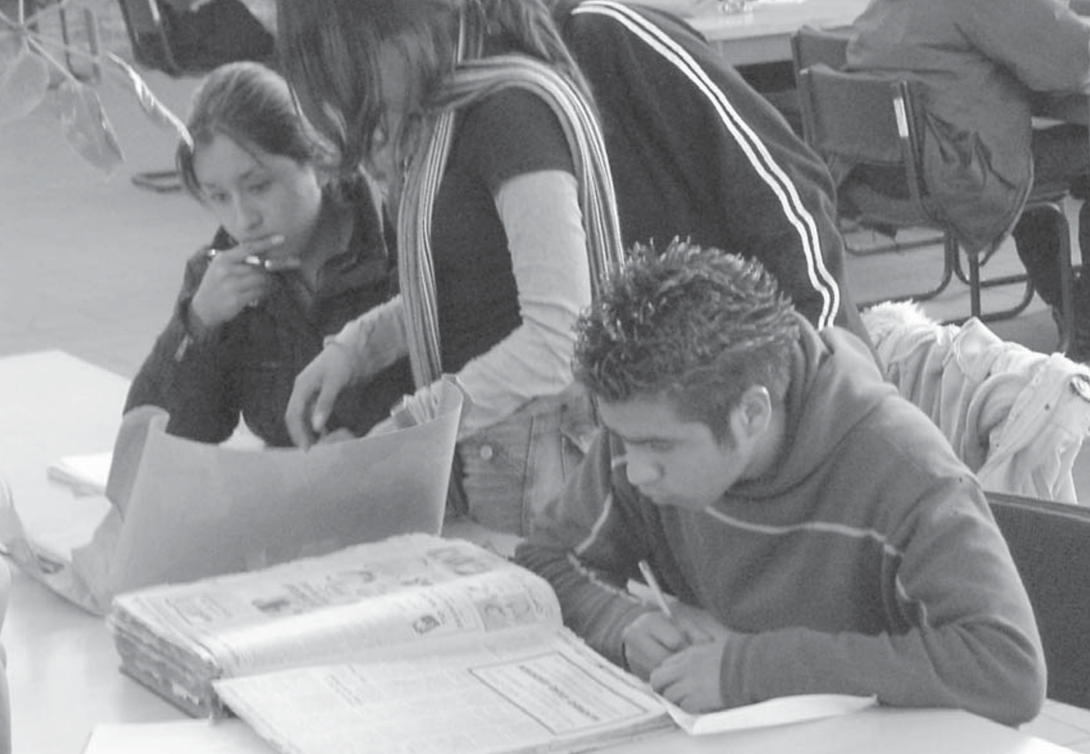
a. 8.4

b. 84

c. 0.84

d. 840

84



3

Propiedades de los números reales

- Representación de los números reales en una recta númerica
- Relación de orden entre los números reales
- Operaciones fundamentales con los números reales
- Notación científica

El conjunto de los números reales resulta de la ampliación de otros conjuntos numéricos, los cuales mencionaremos a continuación.

- Conjunto de los números naturales, N

Está integrado por los números que sirven para contar.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

- Conjunto de los enteros no negativos, Z^+

$$Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Conjunto de los enteros negativos, Z^-

$$Z- = \{-1, -2, -3, -4\ldots\}$$

- Conjunto de los números enteros, Z*

$$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Conjunto de los números racionales, Q**

Este conjunto está constituido por todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q es diferente de cero. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}; \quad -\frac{7}{5}; \quad 4, \text{ porque } 4 = \frac{4}{1}; \quad -6, \text{ porque } -6 = -\frac{6}{1}$$

- Conjunto de los números irracionales, I

Está formado por todos los números que no se pueden escribir como el cociente de dos enteros. Por ejemplo

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \pi$$

---

* El símbolo Z proviene de la palabra alemana *zahe*, que significa *entero*.

** El símbolo Q proviene de la palabra inglesa *quotient*, que significa *cociente*.

Números reales

La unión de los conjuntos de los números racionales y de los números irracionales constituye el conjunto de los números reales.

El conjunto de los números reales se representa por R.

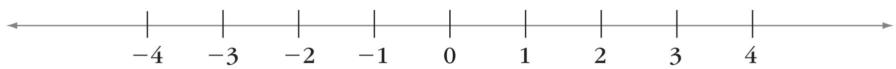
Existe un conjunto numérico más amplio que el de los números reales: los llamados *números complejos*, los cuales analizaremos más adelante.

Representación de los números reales en una recta numérica

Los números reales pueden representarse mediante los puntos de una recta numérica. Para ello, se traza primero una línea recta y se elige un punto en ella que representa el cero, conocido también como *origen*.

Los enteros positivos 1, 2, 3, 4,… se asocian con puntos de la recta situados a la derecha del origen. Para representarlos, se selecciona una unidad de medida; al número 1 le corresponde el punto situado a una unidad de distancia del origen, al número 2 le corresponde el punto que está a una distancia de 2 unidades del origen, y así sucesivamente.

Los enteros negativos -1, -2, -3, -4,… se asocian con puntos de la recta numérica situados a una distancia del origen de 1, 2, 3, 4,… unidades, respectivamente, a la izquierda del cero.



El número $\frac{5}{2}$ se representa en la recta numérica por un punto situado a dos unidades y media a la derecha del origen; el número $-\frac{1}{2}$ se representa por el punto situado a media unidad de distancia a la izquierda del origen.

Así, podemos concluir que a cada número real le corresponde un solo punto de la recta numérica y que, recíprocamente, a cada punto de la recta numérica le corresponde un solo número real. Esto significa que están en correspondencia biunívoca; es decir, el conjunto de los números reales y el de los puntos de una recta numérica son equivalentes entre sí.

Relación de orden entre los números reales

Entre dos números reales a y b existe una relación de orden en la que se establece que un número real es menor o igual que otro. Desde el punto de vista geométrico, cuando dos números a y b se representan por puntos sobre una recta numérica se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes:

1. Si el punto que corresponde al número a está a la derecha del punto correspondiente al número b, entonces a es mayor que b, lo que se representa por $a > b$.
2. Si el punto que corresponde al número a está a la izquierda del que corresponde al número b, entonces a es menor que b; lo cual se representa con $a < b$.
3. Si los puntos que corresponden a dichos números coinciden, entonces a y b son iguales y se simbolizan con $a = b$.

Intervalos

La notación y la terminología de intervalos se utilizan para escribir conjuntos numéricos. Los intervalos son subconjuntos de los números reales.

Dados los números reales a y b, donde $a < b$, presentamos los intervalos siguientes:

1. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

Este intervalo se puede expresar de las tres formas siguientes:

a. 

b. $a \leq x \leq b$

c. $[a, b]$

En este caso, tanto los corchetes como los signos $\leq$ indican que el intervalo incluye los números reales a y b.

2. El conjunto de los números reales mayores que a y menores que b.

Este intervalo puede expresarse de las maneras siguientes:

a. 

b. $a < x < b$

c. (a, b)

Los paréntesis que corresponden a los números a y b indican que en el intervalo no se incluyen dichos números.

3. El conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b.

Este intervalo se puede representar como sigue:

a. 

b. $a < x \leq b$

c. $(a, b]$

4. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b.

Este intervalo se puede expresar de la manera siguiente:

a. 

b. $a \leq x < b$

c. $[a, b)$

5. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

Este intervalo puede expresarse de las formas siguientes:

a. 

b. $x \geq a$

c. $[a, +\infty]$

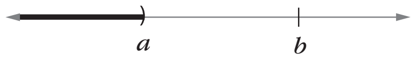
6. El conjunto de los números reales mayores que a.

a. 

b. $x > a$

c. $(a, +\infty)$

7. El conjunto de los números reales menores que a.

a. 

b. $x < a$

c. $(-\infty, a)$

8. El conjunto de los números reales menores o iguales que a.

a. 

b. $x \leq a$

c. $(-\infty, a]$

9. El conjunto de los números reales.

a. 

b. $x \in R$

c. $(-\infty, +\infty)$

Ejemplo 1

a. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales mayores o iguales que -2 y menores que 8.

Solución

$$[-2, 8) \text{ o bien, } -2 \leq x < 8$$

b. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales mayores que -5 y menores o iguales que 12.

Solución

$$(-5, 12] \text{ o bien, } -5 < x \leq 12$$

c. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales mayores o iguales que -1 y menores o iguales que 3.

Solución

$$[-1, 3] \text{ o bien, } -1 \leq x \leq 3$$

d. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales mayores que 6.

Solución

$$(6, +\infty) \text{ o bien, } x > 6$$

e. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales mayores o iguales que -3.

Solución

$$[-3, +\infty) \text{ o bien, } x \geq -3$$

f. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales menores que 5.

Solución

$$(-\infty, 5) \text{ o bien, } x < 5$$

g. Representa en forma de intervalo el conjunto de los números reales menores o iguales que 4.

Solución

$$(-\infty, 4] \text{ o } x \leq 4$$

Operaciones fundamentales con los números reales

Las operaciones fundamentales de álgebra son la suma, la resta, la multiplicación y la división. En esta obra veremos cada una de ellas, pero para que te resulte más fácil aprenderlas, primero estudiaremos sus propiedades.

Propiedades de la suma o adición

Propiedad conmutativa

Esta propiedad señala que el orden de los sumandos no altera la suma.

$a + b = b + a$, cualesquiera que sean los números reales a y b.

Por ejemplo

$$12 + 3 = 3 + 12 \qquad 15 + 8 = 8 + 15 \qquad 3 + n = n + 3$$

Propiedad asociativa

Esta propiedad señala que si se quiere efectuar la suma de los números reales a, b y c sin cambiar el orden de los sumandos se tienen dos opciones.

Una consiste en determinar primero $a + b$ y sumar el resultado con c, es decir, calcular $(a + b) + c$.

La otra opción es efectuar la suma de a con el resultado de la suma de b y c, es decir, $a + (b + c)$. En general, si a, b y c son tres números reales, entonces:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Por ejemplo:

$$6 + 4 + 8 = (6 + 4) + 8 = 6 + (4 + 8) = 18$$

Existencia del elemento neutro para la suma

La suma de un número real a y el cero es igual a dicho número, es decir, al número a.

Por ejemplo:

$$7 + 0 = 7 \qquad 9 + 0 = 9 \qquad 0 + 5 = 5$$

Si a representa un número real se tiene que:

$$a + 0 = a$$

Esta propiedad se enuncia así: "El número real 0 es el elemento neutro para la suma", lo que significa que cualquier número real más cero es igual a dicho número real.

Existencia del inverso aditivo

Si se considera un número real a, entonces existe otro número real $(-a)$, tal que la suma de ambos es igual a cero.

$$a + (-a) = 0$$

Por esta razón, el número $(-a)$ se llama *inverso aditivo* del número a, y viceversa. Por ejemplo

$$4 + (-4) = 0 \qquad -8 + 8 = 0$$

Geométricamente, los inversos aditivos se representan en la recta numérica por puntos situados a la misma distancia del origen, pero en direcciones opuestas.

Si se tiene el número real -6, su inverso aditivo es $+6$. Así:

Para cualquier número real a, $-(-a) = a$

Por ejemplo:

$$-(-7) = 7$$

Suma y valor absoluto de números reales

El valor absoluto de un número representa la distancia que hay desde el origen de la recta numérica hasta ese número; por ejemplo, la distancia del número 5 al origen es 5, la distancia del número -5 al origen es 5; la distancia del origen al -8 es 8 y la distancia del 8 al origen es 8.

El valor absoluto de cualquier número real diferente de cero siempre es un número real positivo.

El valor absoluto de un número se representa mediante dos barras verticales. Por ejemplo, el valor absoluto de 9 se simboliza con $|9|$.

Si a representa un número real, entonces:

$$|a| = a \text{ si } a \text{ es mayor que cero } (a > 0)$$
$$|a| = -a \text{ si } a \text{ es menor que cero } (a < 0)$$
$$|a| = 0 \text{ si } a \text{ es igual a cero } (a = 0)$$

Por ejemplo:

$$|8| = 8 \qquad |0| = 0 \qquad |-10| = -(-10) = 10$$

Suma de números reales

Cuando se suman números reales pueden presentarse las situaciones siguientes:

- La suma de números todos positivos.
- La suma de números todos negativos.
- La suma de números tanto positivos como negativos.

Regla de los signos cuando se suman números con signos iguales

Al sumar dos o más números reales del mismo signo, se suman sus valores absolutos y en el resultado se escribe el signo común de los números. Es decir, los números se suman como en aritmética y al resultado se le antepone el signo común de los sumandos; o sea, $-a + (-b) = -(a + b)$.

Ejemplo 2

Resuelve las sumas siguientes:

a. $5 + 3$

Solución

$$5 + 3 = 8$$

b. $(-8) + (-5)$

Solución

$$(-8) + (-5) = -(8 + 5) = -13$$

Regla de los signos cuando se suman números con signos diferentes

En la suma de dos números con signos diferentes se resta el valor absoluto del número menor del valor absoluto del número mayor. Al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo 3

Suma $20 + (-15)$.

Solución

$20 + (-15) = 5$, ya que $|20| = 20$ y $|-15| = 15$ y $20 - 15 = 5$, y como el signo de 20, que es el número con mayor valor absoluto, es positivo, el resultado tendrá signo positivo. Esto es

$$20 + (-15) = 5$$

Ejemplo 4

Suma $8 + (-14)$.

Solución

$8 + (-14) = -6$ porque $|8| = 8$ y $|-14| = 14$ y $14 - 8 = 6$, y a la diferencia se le antepone el signo del número que tiene mayor valor absoluto, que es -14, es decir:

$$8 + (-14) = -6$$

A partir de los ejemplos anteriores podemos concluir que si se van a sumar dos números de signo diferente, se efectúa la resta como en aritmética, el mayor menos el menor (sin tener en cuenta el signo), y al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

Sustracción o resta

Si se tienen tres números reales $a = b + c$, se dice que c es la diferencia entre a y b y se escribe $a - b = c$. En este caso, a recibe el nombre de *minuendo*, b el de *sustraendo* y c el de *diferencia*.

La operación que permite determinar la diferencia de dos números reales se llama *sustracción* o *resta*.

La sustracción o resta es la operación inversa de la adición o suma porque permite, conocida la suma de dos números y el valor de uno de ellos, encontrar el valor del otro sumando; por ejemplo, la diferencia $17 - 9$ es igual al número que sumado con 9 da 17, es decir, el número 8.

De manera similar

$$9 - (2) = 7 \text{ porque } 7 + 2 = 9$$
$$12 - (8) = 4 \text{ porque } 4 + 8 = 12$$

Analiza los ejemplos siguientes y observa qué sucede cuando se usan sustracciones en las que intervienen números negativos:

$$12 - (-6) = 18 \text{ porque } 18 + (-6) = 12$$
$$15 - (-1) = 16 \text{ porque } 16 + (-1) = 15$$

Podemos concluir que la operación de restar un número negativo es equivalente a la de sumar un número positivo del mismo valor absoluto; es decir, si a y b son dos números reales, entonces:

$$a - (-b) = a + b$$

La operación de sustraer un número de otro puede expresarse en términos de la operación de suma aplicando la regla siguiente:

$$a - b = a + (-b)$$

La operación de restar un número de otro consiste en sumar el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

Ejemplo 5

Haz las restas siguientes:

a. $15 - (4)$.

Solución

$$15 - (4) = 15 + (-4) = 15 - 4 = 11$$

b. $18 - (-2)$.

Solución

$$18 - (-2) = 18 + 2 = 20$$

c. $14 - (14)$.

Solución

$$14 - (14) = 14 + (-14) = 14 - 14 = 0$$

d. $16 - (-16)$.

Solución

$$16 - (-16) = 16 + 16 = 32$$

Propiedades de la sustracción

Las propiedades de la sustracción son:

- La ley de uniformidad.
- La ley de la monotonía o propiedad sustractiva de la igualdad.

La propiedad de uniformidad establece que la diferencia de dos números reales es única; así, la diferencia de $30 - 26$ tiene un valor único, que es 4, porque este número es el único que sumado con 26 es igual a 30.

Por su parte, la propiedad de la monotonía o sustractiva establece que si se sustrae el mismo número de números iguales, las diferencias son iguales.

Es decir, si m y n son dos números reales y $m = n$, entonces:

$$m - r = n - r$$

Por ejemplo:

$$x + 3 = 7;\ x + 3 - 3 = 7 - 3;\ x = 4$$

Signos de agrupación

Es común que las operaciones de sumas y restas se combinen en un mismo problema. Estas combinaciones se construyen con ayuda de los símbolos o signos de agrupación, los cuales se utilizan para asociar o agrupar conjuntos de números relacionados por medio de una o varias operaciones aritméticas.

Los signos de agrupación que se usan en álgebra son:

- Paréntesis ( )
- Corchetes [ ]
- Llaves { }
- Barras | |

Cuando una operación se encierra entre signos de agrupación, significa que dicha operación debe efectuarse primero y después el resto de las operaciones que se indican.

Analiza los ejemplos siguientes:

1. En la expresión $15 + (12 - 3)$ los paréntesis indican que primero se debe realizar la resta $12 - 3$ y después al resultado hay que sumarle 15.
2. En la expresión $(13 - 8) - (15 + 3) + (4 + 2)$ los paréntesis indican que primero se deben hacer las operaciones señaladas entre paréntesis y después, con los resultados obtenidos, las otras operaciones que se indican, es decir:

$$\begin{aligned}(13 - 8) - (15 + 3) + (4 + 2) &= (5) - (18) + (6)\\ &= 5 - 18 + 6\\ &= -7\end{aligned}$$

Cuando uno o más signos de agrupación se encuentran encerrados dentro de otro, las operaciones deben efectuarse de dentro hacia fuera, eliminando de uno en uno cada signo de agrupación.

Considera el ejemplo siguiente:

$$15 + [5 + (6 + 3) - (8 - 2)]$$

En este caso, primero han de realizarse las operaciones indicadas por los paréntesis y luego las operaciones encerradas en los corchetes.

$$\begin{aligned} 15 + [5 + (9) - (6)] &= 15 + [5 + 9 - 6] \\ &= 15 + [8] \end{aligned}$$

Una vez eliminados los paréntesis, se eliminan los corchetes. Observa:

$$\begin{aligned} 15 + [5 + (6 + 3) - (8 - 2)] &= 15 + 8 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Multiplicación

La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números llamados *factores*, calcular un número denominado *producto*.

Si a y b representan dos números reales, el producto de a y b se puede denotar por cualquiera de las expresiones siguientes:

$$a \cdot b \qquad a(b)$$
$$(a)(b) \qquad a \times b$$

En general, la notación $a \times b$ no se utiliza en álgebra.

Propiedades de la multiplicación

- *Ley de uniformidad o unicidad*

  El producto tiene un valor único; por ejemplo, el producto de $5(4) = 20$. Este resultado no puede ser otro.

- *Propiedad conmutativa*

  Esta propiedad establece que el orden de los factores no altera el producto. Por ejemplo

  $$5(4) = 4(5)$$

  Así, si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces:

  $$ab = ba$$

- *Propiedad asociativa*

  Si tenemos el producto de tres números, por ejemplo 2, 9 y 4, primero se puede multiplicar 2(9) y el resultado multiplicarlo por 4, o bien multiplicar primero 9(4) y el resultado multiplicarlo por 2; es decir,

  $$2 \times 9 \times 4 = (2 \times 9) \times 4 = 18 \times 4 = 72$$

  o bien,

  $$2 \times 9 \times 4 = 2 \times (9 \times 4) = 2 \times 36 = 72$$

  Observa que no cambiamos el orden de los factores, sino la forma de agruparlos. La propiedad asociativa de la multiplicación señala que si a, b y c son tres números reales, entonces:

  $$abc = (ab)c = a(bc)$$

- *Elemento neutro de la multiplicación*

  El elemento neutro de la multiplicación es el número 1 porque el producto de todo número por 1 es igual a ese número; por ejemplo:

$$1(6) = 6$$
$$1(-8) = -8$$
$$1(a) = a$$

Si a es cualquier número real:

$$1 \times a = a$$

- *Inverso multiplicativo*

  Para todo número real a distinto de cero existe un número b, también real, tal que $a \times b = 1$.

  El número b no es otro que $\frac{1}{a}$ y se llama *inverso multiplicativo* de a.

  Los números a y $\frac{1}{a}$ son inversos multiplicativos uno respecto del otro. Observa la tabla siguiente:

El inverso multiplicativo de	*es*	*porque*
7	$\frac{1}{7}$	$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$
9	$\frac{1}{9}$	$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$
$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$
$-\frac{7}{4}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{7}{4}\left(-\frac{4}{7}\right) = 1$

- *Propiedad distributiva respecto a la adición*

  Si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces:

$$a(b + c) = ab + ac$$

  Cuando existen más de dos números dentro de los paréntesis se tiene que:

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

  Por ejemplo

$$8 \times (5 + 3) = 8 \times (5) + 8 \times (3) = 40 + 24 = 64$$
$$4(7 + 2 + 1) = 4(7) + 4(2) + 4(1) = 28 + 8 + 4 = 40$$

- *Propiedad distributiva respecto a la resta*

  Si a, b y c son tres números reales cualesquiera, tenemos:

$$a(b - c) = ab - ac$$

- *Propiedad multiplicativa del cero*

  Si se multiplica cualquier número real por cero, su producto es igual a cero. Por ejemplo

$$7(0) = 0 \qquad \left(\tfrac{3}{4}m\right)0 = 0 \qquad 0(-9x) = 0$$

  Si a es un número real, entonces:

$$a(0) = 0$$

Reglas de los signos para la multiplicación

1. Si se multiplican dos números reales con signos iguales, el producto es un número real positivo.
2. Si se multiplican dos números reales con signos diferentes, el producto es un número real negativo.

De las reglas anteriores se deduce que cuando se multiplican más de dos números, el producto será:

- Positivo si existe un número par de factores negativos.
- Negativo si existe un número impar de factores negativos.

Ejemplo 6

Resuelve las multiplicaciones siguientes:

a. 8(4).

Solución

$$8(4) = 32$$

b. 5(−4)(−2).

Solución

$$5(-4)(-2) = 40$$

c. (−4)(−6).

Solución

$$(-4)(-6) = 24$$

d. (−6)(−2)(−1).

Solución

$$(-6)(-2)(-1) = -12$$

e. 8(−5).

Solución

$$8(-5) = -40$$

f. (−3)(−2)(−5)(−4)(−1)

Solución

$$(-3)(-2)(-5)(-4)(-1) = -120$$

División

La división es la operación inversa de la multiplicación y permite, dado el producto de dos factores (llamado *dividendo*) y uno de los factores (llamado *divisor*), calcular el otro factor, el cual se denomina *cociente*.

La división se representa por el signo ÷, una raya horizontal, o bien una raya inclinada colocada entre el dividendo y el divisor.

Si se divide 36 (dividendo) entre 4 (divisor) ($36 \div 4$), el resultado (cociente) es 9 porque $9(4) = 36$.

Analiza estos otros ejemplos:

$$15 \div 3 = 5 \text{ porque } 5(3) = 15$$

$$\tfrac{40}{8} = 5 \text{ porque } 8(5) = 40$$

$$\tfrac{8}{0} \text{ no tiene solución}$$

No es posible realizar la operación $\frac{8}{0}$ porque no existe ningún número real que multiplicado por cero sea igual a 8. La división entre cero no está definida.

> *División*
>
> La división del número real a entre el número real b cuando b no es cero puede interpretarse, en términos de la operación de multiplicación, por medio de la relación $\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}6 = 35$

Propiedades de la división

- *Ley de la uniformidad o unicidad*

  El cociente de dos números reales es único. Por citar un caso, el resultado de $8 \div 2$ es 4 y no otro valor.

- *Propiedad distributiva de la división respecto a la suma*:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \text{ donde } c \neq 0$$

- *Propiedad distributiva de la división respecto a la resta*:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}, \text{ donde } c \neq 0$$

- *Regla de los signos*

  Si se dividen dos números reales con el mismo signo, el cociente tendrá signo positivo, en tanto que si los números que se van a dividir tienen signo diferente, el signo del cociente será negativo.

Ejercicios 1

I. *Para cada una de las expresiones siguientes determina la propiedad de los números reales que se aplica.*

1. $8x\,(y) = 8\,(xy)$

a. Asociativa para la adición
b. Asociativa para la multiplicación
c. Distributiva para la multiplicación
d. Conmutativa para la adición
e. Conmutativa para la multiplicación

b. Asociativa para la multiplicación

2. $(8 + 4) + 3 = 8 + (4 + 3)$

a. Asociativa para la adición
b. Asociativa para la multiplicación
c. Distributiva para la multiplicación
d. Conmutativa para la adición
e. Conmutativa para la multiplicación

a. Asociativa para la adición

3. $y + 0 = y$

a. Inverso aditivo
b. Inverso multiplicativo
c. Elemento neutro para la adición
d. Elemento neutro para la multiplicación

c. Elemento neutro para la adición

4. $4(x + 2) = 4x + 8$

a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

c. Propiedad distributiva para la multiplicación

5. $12 + x = x + 12$

a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

e. Propiedad conmutativa para la adición

6. $y(5) = 5y$

a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

d. Propiedad conmutativa para la multiplicación

7. $9 + (-9) = 0$

a. Inverso aditivo
b. Elemento neutro para la multiplicación
c. Inverso multiplicativo
d. Elemento neutro para la adición

a. Inverso aditivo

8. $7\left(\frac{1}{7}\right) = 1$

a. Inverso aditivo
b. Elemento neutro para la multiplicación
c. Inverso multiplicativo
d. Elemento neutro para la adición

a. Inverso multiplicativo

9. $1x = x$

a. Inverso aditivo
b. Elemento neutro para la multiplicación
c. Inverso multiplicativo
d. Elemento neutro para la adición

c. Elemento neutro para la multiplicación

II. *Resuelve las operaciones siguientes*:

10. $1(-9) =$

11. $(-11)(-3) =$

12. $(-8)5 =$

13. $3(-6)(-2) =$

14. $8(3) - (2) =$

15. $8 + (-20) - (4) =$

16. $-8 + (-6) - (-7) =$

17. $(-20) + (12) =$

18. $14 - (18) =$

19. $\frac{0}{20} =$

20. $\frac{-15}{3} =$

21. $(-2)(-2)(-2) =$

22. $(-3)(-3)(-3) =$

23. $(-2)(-2)(-2)(-2) =$

24. $-4(-4) =$

25. $(-5)5 =$

26. $36 \div (-6) =$

27. $-32 \div (-4)$

28. $-7 - (-7) =$

29. $8(3 - 5) - 9\,(-2) =$

30. $\frac{-12}{-3} =$

31. $\frac{17}{0} =$

32. $\frac{0}{0} =$

33. $-6 + (2) =$

34. $7 + (-15) =$

35. $(-7)6 =$

36. $-5(-4)(-2) =$

37. $(-3) + (-1) =$

38. $(48 \div 6) - (10) =$

39. $-8 \div (-2) =$

40. $20 - (42 \div 2) =$

41. $\dfrac{0}{-5} =$

42. $\dfrac{15}{0} =$

43. $\dfrac{0}{0} =$

44. $-4(-1)(-8) =$

45. $(-9)(-9) =$

46. $(-5)(-5)(-5) =$

47. $15 + (-10) =$

48. $4 + (-4) =$

49. $1(-18) =$

50. $-6 - (-6) =$

51. $(-3) + (-7) =$

52. $(-9) - (-4) =$

53. $(-8)(-4) =$

54. $(-6) + (14) =$

55. $-(20) - (16 \div 2) =$

56. $1(-6) =$

III. *Resuelve los problemas siguientes*:

57. En la tabla que sigue se muestran las entradas y salidas de un banco de sangre.

Lunes	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*	*Sábado*	*Domingo*
Entraron 4 litros	Salieron 7 litros	Salieron 2 litros	Entraron 3 litros	Entraron 6 litros	Salieron 10 litros	Entró 1 litro

¿Cuál es la variación que se registró durante dicha semana de la reserva de sangre?

-5 litros

58. En cierta ciudad, la temperatura a las 16:00 PM era de 6° Celsius (C) y a las 24:00 horas de -2 °C. ¿Cuánto varía la temperatura?

-8 °C

59. A las 6:00 AM, la ciudad de Saltillo registró una temperatura de -3 °C y a las 15:00 PM una de 7 °C. ¿Cuál fue el cambio de temperatura?

10 °C

60. La temperatura de la ciudad de Monterrey es de 17 °C y se estima que descenderá a razón de 2 °C por hora. ¿Cuál será la temperatura estimada dentro de 10 horas?

-3 °C

61. Un submarino sumergido 280 metros (m) bajo el nivel del mar disparó un cohete que subió 700 m. ¿A qué altura sobre el nivel del mar llegó el cohete?

420 m

62. En la ciudad de Chihuahua la temperatura a las 8:00 AM era de 24 °C y a las 3:00 PM, de −16 °C. ¿Cuál es el cambio de temperatura?

−40 ºC

63. En la tabla siguiente se muestran las utilidades de un negocio en los primeros seis meses del año. ¿Cuánto dinero ha ganado durante este tiempo?

Enero	*Febrero*	*Marzo*	*Abril*	*Mayo*	*Junio*
\$35 684	\$41 500	\$29 674	\$30 670	\$38 654 60	\$43 750

64. Luis pesa 90 kilogramos (kg), pero lleva una dieta que le permitirá bajar 2 kg por mes. ¿Cuál será su peso en 7 meses?

76 kg

65. Un tanque de gasolina se vacía a razón de 25 litros (l) por minuto. Si tarda 40 minutos en vaciarse, ¿cuántos litros caben en el tanque?

1000 l

66. En una noche de invierno, la temperatura cambió de -4 °C a -9 °C. ¿Cuántos grados bajó la temperatura?

5 ºC

Potenciación

Las potencias de un número son los resultados que se obtienen al tomarlo como factor dos veces o más. Por ejemplo

$$5 \times 5 = 25 \qquad 5 \times 5 \times 5 = 125 \qquad 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Cuando un número se toma como factor dos veces, el resultado es la segunda potencia o el cuadrado de dicho número.

Cuando se toma como factor tres veces, el resultado es la tercera potencia o el cubo de dicho número.

Si se toma como factor cuatro veces, el resultado es la cuarta potencia de dicho número, y así sucesivamente.

No olvides que la primera potencia de un número es el mismo número.

El número que se multiplica por sí mismo se llama *base de la potencia*.

Para simbolizar la potenciación se escribe la base y en la parte superior derecha se anota un número más pequeño que indica cuántas veces se toma como factor dicha base. Este superíndice se denomina *exponente*.

Por ejemplo, el número 3 elevado a la cuarta potencia se representa por 3^4 y el resultado es $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

El resultado de elevar un número diferente de cero a una potencia par tendrá siempre signo positivo, mientras que si se eleva un número negativo a una potencia donde el exponente es impar, el resultado tendrá siempre signo negativo. Por ejemplo

$$(-3)^4 = 81 \qquad (-2)^5 = -32$$
$$(-3)^3 = -27 \qquad (-2)^4 = 16$$

Propiedades de los exponentes

- Regla del producto para los exponentes

  Considera las multiplicaciones siguientes:

1. $5^4 \times 5^2 = 5(5)(5)(5) \times 5(5) = 5^6$
2. $7^4 \times 7 = 7(7)(7)(7) \times (7) = 7^5$
3. $2^5 \times 2^6 = 2(2)(2)(2)(2) \times 2(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{11}$

A partir de los ejemplos anteriores podemos deducir esta regla:

$$a^x \cdot a^y \cdot a^z{}_{\ldots} = a^{x+y+z\ldots}$$

Así, tenemos que, por ejemplo

$$2^8 \times 2^4 = 2^{12} \qquad 5^4 \times 5^5 = 5^9 \qquad a^9 \times a^3 = a^{12}$$

- Regla del cociente para los exponentes

  Considera las divisiones siguientes:

1. $\dfrac{2^7}{2^3} = \dfrac{2(2)(2)(2)(2)(2)(2)}{2(2)(2)} = 1(1)(1)(2)(2)(2)(2) = 2^4$

2. $\dfrac{3^8}{3^6} = \dfrac{3(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)}{3(3)(3)(3)(3)(3)} = 1(1)(1)(1)(1)(1)(3)(3) = 3^2$

A partir de los ejemplos anteriores podemos deducir esta regla:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ donde } a \neq 0$$

Así, tenemos los ejemplos siguientes

$$\frac{x^{12}}{x^4} = x^{12-4} = x^8 \qquad \frac{a^7}{a^2} = a^{7-2} = a^5 \qquad \frac{w}{w^6} = w^{1-6} = w^{-5}$$

- Regla de la base con exponente cero

Como sabes, todo número dividido entre sí mismo es igual a 1. Por ejemplo

$$6 \div 6 = 1 \qquad -8 \div -8 = 1 \qquad a \div a = 1 \qquad \frac{-b}{-b} = 1$$

Si a es un número real diferente de cero, entonces $\frac{a}{a} = 1$ y, además, de acuerdo con las leyes de los exponentes, $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1$; por tanto $\frac{a}{a} = a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

Todo número diferente de cero elevado a la potencia cero es igual a 1

$$a^0 = 1, \text{ donde } a \neq 0$$

Así, tenemos, por citar algunos ejemplos

$$5^0 = 1, \quad (-9)^0 = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{4}{7}\right)^0 = 1, \quad (-y)^0 = 1 \quad \text{cuando } y \neq 0$$

- Regla del exponente negativo

Considera la multiplicación $a^{-m} \cdot a^m$, donde a es un número real distinto de cero.

De acuerdo con la regla del producto para exponentes

$$a^{-m} \cdot a^m = a^0 = 1; \text{ es decir, } a^{-m} \cdot a^m = 1.$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad anterior por $\frac{1}{a^m}$ y aplicamos la propiedad de la monotonía para la división, tenemos: $\frac{a^{-m}a^m}{a^m} = \frac{1}{a^m}$, de donde se deduce que

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

En este caso tenemos que, por ejemplo

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \qquad x^{-7} = \frac{1}{x^7}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ para todo } x \neq 0$$

- Regla de la potencia de una potencia

Consideremos la operación $(x^5)^4$. El exponente 4 indica que x^5 se toma como factor cuatro veces; es decir:

$$(x^5)^4 = x^5 \times x^5 \times x^5 \times x^5 = x^{5+5+5+5} = x^{20}$$

Observa que si se multiplican los exponentes 5 y 4, su producto es 20. Analiza este otro ejemplo:

$$(n^2)^6 = n^2(n^2)(n^2)(n^2)(n^2)(n^2) = n^{2+2+2+2+2+2} = n^{12}$$

Nuevamente nota que el exponente de la potencia es igual al producto de los exponentes. Por tanto, para todo número real a

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Por ejemplo

$$(2^4)^3 = 2^{12} \qquad (a^5)^6 = a^{30} \qquad \left(a^{-2}\right)^4 = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Por último, tenemos las siguientes propiedades de los exponentes:

- Regla: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Podemos citar estos ejemplos

$$(5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2 \qquad (xy)^6 = x^6 \cdot y^6 = x^6y^6$$

- Regla: $(a^n \cdot b^m \cdot\ldots\cdot z^w)^x = a^{nx} \cdot b^{mx} \cdot \ldots \cdot z^{wx}$

En este caso se tiene que, por ejemplo

$$(a^2 \cdot b^5)^4 = a^8 \cdot b^{20} = a^8b^{20} \qquad (3xy^5z^3)^3 = 27x^3y^{15}z^9$$

$$\left(2^{-2}a^5b^3y^{-6}\right)^2 = 2^{-4}a^{10}b^6y^{-12} = \frac{a^{10}b^6}{2^4y^{12}} = \frac{a^{10}b^6}{16y^{12}}$$

- Regla: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, donde $b \neq 0$

Por ejemplo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^6 = \frac{x^6}{y^6} \qquad \left(\frac{x^2}{y^5}\right)^6 = \frac{x^{12}}{y^{30}}$$

- Regla: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, donde a y $b \neq 0$

Por citar algunos casos

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-6} = \left(\frac{y}{x}\right)^6 = \frac{y^6}{x^6} \qquad \left(\frac{a^2}{b^7}\right)^{-2} = \left(\frac{b^7}{a^2}\right)^2 = \frac{b^{14}}{a^4}$$

Ejercicios 2

I. *Evalúa las potencias siguientes.*

1. $(2)^3$	**2.** $(-6)^2$	**3.** $(-2)^4$

4. 7^0

7. $(5^4)^0$

10. 4^{-2}

5. $(-3)^3$

8. $(2^3)^2$

11. 2^{-3}

6. $(-9)^0$

9. $(-4^3)^0$

12. $(3^2)^{-1}$

II. *Simplifica las expresiones siguientes. Escribe el resultado sin exponentes nulos y sin exponentes negativos.*

13. $bb^4 =$

16. $yy^6 =$

19. $w^7w^{-7} =$

14. $a^{-3}a^3 =$

17. $(xy^3)^4 =$

20. $w^{-1}w^{-1} =$

15. $x^2x^8 =$

18. $\dfrac{y^{12}}{y^5} =$

21. $x^{-4}x^0 =$

22. $x^2x^8 =$

23. $yy^6 =$

24. $x^{-3}x^7 =$

25. $\frac{x^2}{x} =$

26. $\frac{x^9}{x^2} =$

27. $\frac{y^6}{y^5} =$

28. $\frac{n^{10}}{n^6} =$

29. $\frac{y^{16}}{y^{10}} =$

30. $ww^{-2} =$

31. $m^6m^{-6} =$

32. $\frac{b^3}{b^3} =$

33. $\frac{y}{y} =$

34. $(b^2)^{-5} =$

35. $(a^2b)^5 =$

36. $\left(\frac{a^5}{b}\right)^2 =$

37. $yy^{-6} =$

38. $\frac{x^4}{x^7} =$

39. $\frac{w^6}{w^{10}} =$

40. $\frac{a^4}{a^{-8}} =$

41. $\frac{x^2}{x^{-2}} =$

42. $\frac{x^{-7}}{x^{-2}} =$

43. $\dfrac{y^{-4}}{y^{-9}} =$	48. $(b^4)^5 =$	55. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-4}$
44. $\dfrac{b^{-4}}{b^{-5}} =$	50. $\dfrac{y^{-2}}{y} =$	56. $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^2}\right)^{-4}$
45. $\dfrac{n^{-8}}{n^{-3}} =$	51. $(x^2)^6 =$	47. $\left(\dfrac{x^4}{y}\right)^{-2}$
46. $\dfrac{w^{-6}}{w^{-6}} =$	52. $(y^6)^{-2} =$	58. $(n^2m^5b^{-2})^3 =$
47. $\dfrac{b^4}{b^{-4}} =$	53. $(b^{-4})^5 =$	59. $\left(\dfrac{w^{-4}}{y^{-2}}\right)^2 =$
48. $\dfrac{x}{x^{-1}} =$	54. $\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right)^4 =$	60. $\left(\dfrac{x^6}{y^{-4}}\right)^{-2} =$

Radicación

La *radicación* es la operación inversa de la potenciación y permite, conociendo la potencia y el exponente, determinar la base correspondiente.

Como $6^2 = 36$, se dice que 6 es raíz cuadrada de 36 y se representa con $\sqrt{36} = 6$.

Como $2^3 = 8$, se dice que el 2 es raíz cúbica de 8 y se simboliza con $\sqrt[3]{8} = 2$; si se tiene $3^4 = 81$, el 3 es raíz cuarta de 81 y se denota con $\sqrt[4]{81} = 3$.

El signo $\sqrt[n]{\ }$ se conoce como *radical*, el número o expresión que se encuentra dentro del radical se llama *radicando* y el número n, que es siempre un número natural, se denomina *índice del radical*.

Las raíces cuadradas tienen índice 2 y, en general, éste no se escribe.

Ejemplo 7

En las raíces siguientes, indica qué número es el radicando y cuál el índice.

a. $\sqrt[3]{27}$

Solución

El radicando es 27 y el índice es 3. Se lee “raíz cúbica de 27”.

b. $\sqrt{49}$

Solución

El radicando es 49 y el índice es 2. Se lee “raíz cuadrada de 49”.

Si n es un número natural y $a^n = b$, por definición a es la raíz n-ésima de b.

Si b es un número positivo, sólo hay un número positivo tal que $a^n = b$. Dicho número se representa como $\sqrt[n]{b}$ y recibe el nombre de raíz n-ésima principal de b.

Por ejemplo, la raíz cuadrada principal de 36 es 6 y se escribe $\sqrt{36} = 6$. La raíz cuarta principal de 16 es 2 y se escribe $\sqrt[4]{16} = 2$.

Si b es negativo y n es par, no existe raíz n-ésima real de b, pero si n es impar, existe un número negativo que es la raíz n-ésima de b. Por ejemplo, la raíz cúbica principal de -8 es -2 y se escribe $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Resumiendo lo anterior, si n es un número ≥ 2, se tiene que la expresión

$$\sqrt[n]{b}$$

- No está definida para el conjunto de los números reales si n es par y $b < 0$.
- Es igual a cero si $b = 0$
- Es mayor que cero si $b > 0$
- Es menor que cero si n es impar y $b < 0$

Ejemplo 8

Resuelve las raíces siguientes

a. $\sqrt{-16}$

b. $\sqrt{25}$

c. $\sqrt[4]{-81}$

d. $\sqrt[3]{-8}$

e. $\sqrt[5]{0}$

f. $\sqrt[3]{-64} = -4$

g. $\sqrt{0}$

h. $\sqrt[5]{-32}$

i. $\sqrt[3]{27} = 3$

j. $\sqrt[7]{-128} = -2$

Solución

a. $\sqrt{-16}$ no está definida para el conjunto de los números reales.

b. $\sqrt{25} = 5$

c. $\sqrt[4]{-81}$ no está definida para el conjunto de los números reales.

d. $\sqrt[3]{-8} = -2$

e. $\sqrt[5]{0} = 0$

f. $\sqrt[3]{-64} = -4$

g. $\sqrt{0} = 0$

h. $\sqrt[5]{-32} = -2$

i. $\sqrt[3]{27} = 3$

j. $\sqrt[7]{-128} = -2$

Exponentes racionales

Una expresión radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ se puede escribir como una expresión exponencial utilizando la propiedad siguiente:

$$(a^{1/n})^m = a^{m/n}$$

Para cualquier número positivo a y enteros m y $n \geq 2$ (mayores o iguales que 2) tenemos que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplo 9

Resuelve las operaciones siguientes

a. $2^{3/4}$

b. $8^{2/3}$

c. $b^{3/4}$

d. $16^{1/2}$

e. $a^{1/2} = \sqrt{a}$

f. $m^{2/5}$

g. $27^{1/3}$

h. $x^{5/9}$

Solución

a. $2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$

b. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2}$

c. $b^{3/4} = \sqrt[4]{b^3}$

d. $16^{1/2} = \sqrt{16}$

e. $a^{1/2} = \sqrt{a}$

f. $m^{2/5} = \sqrt[5]{m^2}$

g. $27^{1/3} = \sqrt[3]{27}$

h. $x^{5/9} = \sqrt[9]{x^5}$

Ahora considera que en la expresión $\sqrt[n]{b^m}$ se tiene el caso en que $m = n$, entonces resulta que $\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{b^n}$. En esta situación es necesario puntualizar lo siguiente:

- Si n es impar, $\sqrt[n]{b^n} = b^{n/n} = b$ para todo número real b.
- Si n es par, $\sqrt[n]{b^n} = b$ para todo número real $b > 0$ y es igual a $(-b)$ para todo número $b < 0$.

Ejemplo 10

Resuelve las operaciones siguientes

a. $\sqrt{5^2}$

b. $\sqrt{(-5)^2}$

c. $\sqrt[4]{(-3)^4}$

d. $\sqrt{7^2}$

e. $\sqrt{(-6)^2}$

f. $\sqrt[6]{(-2)^6}$

Solución

a. $\sqrt{5^2} = 5$

b. $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$

c. $\sqrt[4]{(-3)^4} = -(-3) = 3$

d. $\sqrt{7^2} = 7$

e. $\sqrt{(-6)^2} = -(-6) = 6$

f. $\sqrt[6]{(-2)^6} = -(-2) = 2$

Si n es par, se cumple que para cualquier número real a:

$$\sqrt[n]{a^n} = |\,a\,|$$

Ejemplo 11

Resuelve las operaciones siguientes

a. $\sqrt{5^2}$

b. $\sqrt{(2x-5)^2}$

c. $\sqrt{x^2}$

d. $\sqrt{(-6)^2}$

e. $\sqrt{(x+7)^2}$

f. $\sqrt[4]{a^4}$

Solución

a. $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

b. $\sqrt{(2x-5)^2} = |2x-5|$

c. $\sqrt{x^2} = |x|$

d. $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

e. $\sqrt{(x+7)^2} = |x+7|$

f. $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

Puesto que todos los radicales de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ son positivos o cero, cuando tenemos un problema que se quiere simplificar existen dos soluciones:

- $\sqrt{w^2} = w$ si $w > 0$
- $\sqrt{w^2} = -w$ si $w < 0$

En este texto nos apegaremos al criterio siguiente: cuando aparezcan literales dentro de una radical, se supondrá que todas las variables representan números positivos, es decir, mayores que cero; esto con el fin de que puedan expresarse respuestas sin signos de valor absoluto.

Entonces:

1. $\sqrt[6]{a^6} = a$ **2.** $\sqrt{x^2} = x$ **3.** $\sqrt[4]{y^4} = y$

Ejercicios 3

I. *Escribe estos números en forma exponencial.*

1. $\sqrt{5} =$	**4.** $\sqrt[5]{4} =$	**7.** $\sqrt[3]{2^2} =$
2. $\sqrt{6} =$	**5.** $\sqrt[3]{8} =$	**8.** $\sqrt[4]{2^3} =$
3. $\sqrt[3]{2} =$	**6.** $\sqrt[4]{5} =$	

II. *Escribe los números siguientes en forma de radical.*

9. $3^{1/2} =$

12. $7^{1/3} =$

15. $2^{4/5} =$

10. $8^{1/4} =$

13. $5^{2/3} =$

16. $5^{3/2} =$

11. $9^{1/2} =$

14. $10^{3/4} =$

III. *Evalúa estas expresiones.*

17. $64^{1/3} - 81^{1/2} =$

-5

20. $8^{2/3} + (-27)^{1/3} - 8^0 =$

0

18. $25^{1/2} + 27^{1/3} - (-2) + (-1) =$

9

21. $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} + (-10) - (5) - (-11) =$

-3

19. $(-8)^{1/3} + 36^{1/2} - (-2) =$

6

22. $-\sqrt[3]{64} - (-9) + (-3) =$

2

Notación científica

La notación científica consiste en expresar números muy grandes o muy pequeños con la ayuda de potencias de base 10.

Cuando un número se escribe en notación científica aparece como un número mayor o igual que 1, pero menor que 10, multiplicado por alguna potencia de base 10.

Por ejemplo

$$4.6 \times 10^5 \qquad 3.9 \times 10^{-5} \qquad 10^7$$

A continuación analizaremos cómo proceder para expresar un número en notación científica.

Caso 1. El número dado es mayor que 1

En este caso, el punto decimal se mueve a la izquierda y se escribe a la derecha del primer dígito diferente de cero; después se multiplica por una potencia de base 10 y el exponente es igual al número de lugares que se recorrió el punto decimal.

Ejemplo 12

Escribe los números siguientes en notación científica:

a. 418 000 000.

b. 345 000.

c. 64 800 000 000

Solución

a. $418\,000\,000 = 4.18 \times 10^8$

b. $345\,000 = 3.45 \times 10^5$

c. $64\,800\,000\,000 = 6.48 \times 10^{10}$

Caso 2. El número dado es menor que 1

En este caso, el punto decimal se mueve a la derecha y se escribe a la derecha del primer dígito diferente de cero; después se multiplica por una potencia de base 10 y el exponente es igual al número de lugares que se recorrió el punto decimal, pero con signo negativo.

Ejemplo 13

Escribe los números siguientes en notación científica:

a. 0.000057

b. 0.0078

c. 0.0000000065

d. 0.42581

e. 2.23

Solución

a. $0.000057 = 5.7 \times 10^{-5}$

b. $0.0078 = 7.8 \times 10^{-3}$

c. $0.0000000065 = 6.5 \times 10^{-9}$

d. $0.42581 = 4.2581 \times 10^{-1}$

e. 2.23: en este caso no hay que hacer nada, ya que este número está escrito en notación científica.

Ejercicios 4

I. *Expresa las cantidades físicas que se indican en notación científica.*

1. La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 93 000 000 millas.

2. La masa de un protón es de 0.000 000 000 000 000 000 000 16 gramos.

3. La superficie aproximada de la Tierra es de 148 000 000 000 000 m^2.

4. El tamaño aproximado de un virus es de 0.000 000 042 m.

5. La masa aproximada de la Tierra es de 61 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

6. La masa aproximada de cierta molécula es de 0.000 045 gramos.

II. *Efectúa estas operaciones en notación científica.*

7. $45\ 000\ 000 \times 0.000\ 14 =$

a. 6.3×10^{11}
b. 6.3×10^{-3}
c. 6.3×10^{3}
d. 6.3×10^{4}

c. 6.3×10^{3}

8. $245\ 000\ 000 \times 0.000\ 016 =$

a. 3.92×10^{3}
b. 3.92×10^{13}
c. 3.92×10^{-3}
d. 3.92×10^{4}

a. 3.92×10^{3}

3. $\dfrac{0.000\ 000\ 014}{7\ 000\ 000} =$

a. 2×10^{-3}
b. 2×10^{15}
c. 2×10^{3}
d. 2×10^{-15}

d. 2×10^{-15}

4. $\dfrac{9\ 000\ 000\ 000\ 000}{300\ 000\ 000} =$

a. 3×10^{5}
b. 3×10^{4}
c. 3×10^{-4}
d. 3×10^{20}

b. 3×10^{4}

5. $\dfrac{150\ 000}{0.000\,03} =$

a. 5×10^{9}
b. 5×10^{-9}
c. 5×10^{-7}
d. 5×10^{7}

a. 5×10^{9}

6. $\dfrac{4\,000}{0.000\,000\,002} =$

a. 2×10^{6}
b. 2×10^{-6}
c. 2×10^{12}
d. 2×10^{-12}

c. 2×10^{12}

7. $\dfrac{0.000\,000\,008}{0.000\,000\,000\,000\,000\,2} =$

a. 4×10^{7}
b. 4×10^{-7}
c. 4×10^{-25}
d. 4×10^{25}

a. 4×10^{7}

8. $\dfrac{0.0025}{500\,000\,000\,000} =$

a. 5×10^{-7}
b. 5×10^{-15}
c. 5×10^{7}
d. 5×10^{15}

b. 5×10^{-15}

9. $\dfrac{0.00006 \times 0.000\ 000\ 08}{1200\ 000\ 000} =$

a. 4×10^{-21}
b. 4×10^{-22}
c. 4×10^{-23}
d. 4×10^{5}

a. 4×10^{-21}

10. $\dfrac{4\,900\,000\,000 \times 0.000\,01}{0.000\,007} =$

a. 7×10^{-2}
b. 7×10^{10}
c. 7×10^{-9}
d. 7×10^{9}

d. 7×10^{9}

III. *Resuelve cada uno de los problemas siguientes utilizando notación científica.*

11. La distancia promedio de Marte a la Tierra es de 35 000 000 millas. Expresa esta cantidad en kilómetros y en notación científica. (*Nota:* 1 milla = 1.609 km)

a. 5.96×10^{7} km

b. 5.63×10^{8} km

c. 5.63×10^{-7} km

d. 5.63×10^{7} km

d. 5.63×10^{7} km

---

12. Calcula la masa de 15 millones de protones si la masa de cada uno de ellos es igual a 0.000 000 000 000 000 000 16 g.

a. 2.4×10^{-12}

b. 2.4×10^{-11}

c. 2.4×10^{-10}

d. 2.4×10^{-14}

a. 2.4×10^{-12}

---

13. Calcula cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de un protón si:
Masa de la Tierra = 5980 000 000 000 000 000 000 000
Masa del protón = 0.000 000 000 000 000 000 16g

a. 3.7×10^{45} veces

b. 3.7×10^{40} veces

c. 3.7×10^{43} veces

d. 3.7×10^{46} veces

c. 3.7×10^{43} veces

---

14. Calcula la densidad media de la Tierra si su masa es de 5980 000 000 000 000 000 000 000 kg y su volumen es de 1080 000 000 000 km^{3}. Expresa el resultado en gm/cm^{3}. (*Recuerda:* densidad = masa/volumen y 1 km = 10^{5} cm.)

a. 5.5×10^{2} g/cm^{3}

b. 5.5 g/cm^{3}

c. 0.5 g/cm^{3}

d. 55 g/cm^{3}

b. 5.5 g/cm^{3}

Evaluación

I. *Para cada una de las expresiones siguientes, determina la propiedad de los números reales que se aplica.*

1. $8(7) = 7(8)$
a. Asociativa para la adición
b. Asociativa para la multiplicación
c. Distributiva para la multiplicación
d. Conmutativa para la adición
e. Conmutativa para la multiplicación

e. Conmutativa para la multiplicación

2. $8(4 + 3) = 32 + 24$
a. Asociativa para la adición
b. Asociativa para la multiplicación
c. Distributiva para la multiplicación
d. Conmutativa para la adición
e. Conmutativa para la multiplicación

c. Distributiva para la multiplicación

3. $(8 + 7) + 3 = 8 + (7 + 3)$
a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

a. Propiedad asociativa para la suma

4. $6 \times 1 = 6$
a. Inverso aditivo
b. Inverso multiplicativo
c. Elemento neutro para la adición
d. Elemento neutro para la multiplicación

d. Elemento neutro para la multiplicación

5. $(-6) + 8 = 8 + (-6)$
a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

e. Propiedad conmutativa para la adición

6. $(8 \times 5) \times 6 = 8 \times (5 \times 6)$
a. Propiedad asociativa para la suma
b. Propiedad asociativa para la multiplicación
c. Propiedad distributiva para la multiplicación
d. Propiedad conmutativa para la multiplicación
e. Propiedad conmutativa para la adición

b. Propiedad asociativa para la multiplicación

7. $8x + 0 = 8x$
a. Inverso aditivo
b. Elemento neutro para la multiplicación
c. Inverso multiplicativo
d. Elemento neutro para la adición

d. Elemento neutro para la adición

8. $5 \times \frac{1}{5} = 1$
a. Inverso aditivo
b. Elemento neutro para la multiplicación
c. Inverso multiplicativo
d. Elemento neutro para la adición

c. Inverso multiplicativo

9. $5 + (-5) = 0$

a. Inverso aditivo

b. Elemento neutro para la multiplicación

c. Inverso multiplicativo

d. Elemento neutro para la adición

a. Inverso aditivo

II. *Resuelve las operaciones siguientes.*

10. $\dfrac{(7-3)^2 + (6-9)^2}{(10-15)^2}$

a. 0

b. 1

c. -1

d. 2

b. 1

11. En la expresión $3^n = 81$, ¿cuál es el valor de n?

a. 2

b. 3

c. 4

d. 24

4

12. $4 \times 8 - (16 \div 2) =$

a. 8

b. 3

c. 41

d. 24

d. 24

13. $(-13) - (15) + (-2) + (7) - (-30)$

a. -6

b. 7

c. 6

d. -7

b. 7

14. $(-2)^5 + 4(27^{1/3}) + 5(-2)$

a. 54

b. 30

c. -30

d. -20

c. -30

15. $9\left(\dfrac{1}{9}\right) - \left(\dfrac{3^4}{3^2}\right) - (36^{1/2}) \div 2$

a. 7

b. -10

c. -11

d. -12

c. 11

16. $\dfrac{(4^3)^5}{(4^6)^2} - 5(5^2) + \left(\dfrac{6^7}{6^5}\right) + 30(-2)^0 - \sqrt{25}$

a. 1

b. -1

c. 0

d. 2

c. 0

III. *Obtén la respuesta de las operaciones siguientes y exprésalas en notación científica.*

17. $\dfrac{0.000006 \times 0.000\,08}{0.0012}$

a. 4×10^{-7}

b. 4×10^{-5}

c. 4×10^{-9}

d. 4×10^{-8}

a. 4×10^{-7}

18. $\dfrac{22\,000\,000 \times 0.000\,000\,000\,000\,9}{0.00033}$

a. 6×10^{-1}

b. 6×10

c. 6×10^{-10}

d. 6×10^{-2}

d. 6×10^{-2}

IV. *Resuelve los problemas siguientes.*

19. En cierta noche de invierno, la temperatura disminuye de 2 °C a −5 °C, ¿cuál fue el cambio de temperatura?

a. −3 °C

b. −7 °C

c. 7 °C

d. 3 °C

b. −7 °C

20. En la tabla siguiente se muestran los puntos registrados en la bolsa de valores durante las tres semanas pasadas. ¿En qué semana se registró la mayor ganancia y a cuánto ascendió ésta?

Día / *Semana*	*Lunes*	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*
1a.	+56	−47	−15	+10	+15
2a.	+15	+17	−30	+46	+12
3a.	+12	+15	−18	+8	−25

a. 46

b. 64

c. 58

d. 60

d. 60

21. Si sabemos que la masa de un protón es de 0.000 000 000 000 000 000 016 g, calcula la masa de 10 millones de protones.

a. 1.6×10^{-14}

b. 1.6×10^{-16}

c. 1.6×10^{-18}

d. 1.6×10^{-15}

d. 1.6×10^{-15}

22. La Luna se encuentra a unos 3 782 000 km de la Tierra. Expresa la distancia en pulgadas. (*Recuerda:* 1 pulgada es igual a 2.54 cm.)

a. 1.49×10^{12} pulg

b. 1.49×10^{11} pulg

c. 1.49×10^{10} pulg

d. 1.49×10^{9} pulg

b. 1.49×10^{11} pulg

V. *Simplifica las expresiones algebraicas siguientes. Expresa el resultado sin exponentes nulos ni negativos.*

23. $(a^4b^2)(a^3b)$
    a. a^7b^2
    b. a^7b^3
    c. ab
    d. $a^{12}b^2$

b. a^7b^3

24. $\dfrac{a^{14}}{a^9}$
    a. a^{23}
    b. $\dfrac{1}{a^5}$
    c. a^5
    d. a^{25}

c. a^5

25. $\dfrac{y^8}{y^8}$
    a. y^{16}
    b. 0
    c. 1
    d. y^{64}

c. 1

26. $\dfrac{x^4}{x^6}$
    a. x^2
    b. $\dfrac{1}{x^2}$
    c. x^{10}
    d. x^{24}

b. $\dfrac{1}{x^2}$

27. $(x^4y^3)^2$
    a. x^6y^5
    b. $x^{16}y^9$
    c. $2x^4y^3$
    d. x^8y^6

d. x^8y^6

28. $\dfrac{w^4}{w^{-6}}$
    a. w^{10}
    b. w^2
    c. w^{-2}
    d. $\dfrac{1}{w^{10}}$

a. w^{10}

29. $\dfrac{b^{-7}}{b^3}$
    a. b^{10}
    b. b^4
    c. $\dfrac{1}{b^4}$
    d. $\dfrac{1}{b^{10}}$

d. $\dfrac{1}{b^{10}}$

30. $\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right)^2$
    a. x^4y^7
    b. $\dfrac{x^4}{y^{10}}$
    c. $\dfrac{x^4}{y^7}$
    d. $\dfrac{x^4}{y^5}$

b. $\dfrac{x^4}{y^{10}}$

31. $\left(\dfrac{a^{-5}}{b^3}\right)^{-4}$
    a. $\dfrac{a^{20}}{b^{12}}$
    b. $\dfrac{1}{a^{20}b^{12}}$
    c. $a^{20}\ b^{12}$
    d. $\dfrac{b^{12}}{a^{20}}$

c. $a^{20}\ b^{12}$

32. $\left(\dfrac{a^3}{b^6}\right)^{-2}$

a. $\dfrac{b^4}{a}$

b. $\dfrac{a}{b^4}$

c. $\dfrac{a^6}{b^{12}}$

d. $\dfrac{b^{12}}{a^6}$

d. $\dfrac{b^{12}}{a^6}$

33. x^6x^{-4}

a. x^2

b. x^{10}

c. $\dfrac{1}{x^2}$

d. $\dfrac{1}{x^{24}}$

a. x^2

34. $b^{-7}b^7$

a. 0

b. 1

c. b^{14}

d. $\dfrac{1}{b^{14}}$

b. 1

35. n^4n^{-7}

a. n^3

b. n^{11}

c. $\dfrac{1}{n^{11}}$

d. $\dfrac{1}{n^3}$

d. $\dfrac{1}{n^3}$

36. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-3}$

a. $\dfrac{b^6}{a^9}$

b. $\dfrac{1}{b}$

c. a^9a^6

d. $\dfrac{a^9}{a^6}$

a. $\dfrac{b^6}{a^9}$

37. $(x^4y^{-2}w^0)^3$

a. $\dfrac{x^{12}}{y^6}$

b. $\dfrac{x^{12}w}{y^6}$

c. $x^{12}y^6$

d. x^7y

a. $\dfrac{x^{12}}{y^6}$

4

Divisibilidad, múltiplos y divisores

- Divisibilidad
- Números primos
- Máximo común divisor
- Mínimo común múltiplo

Divisibilidad

Se dice que un número es divisible entre otro cuando lo contiene un número exacto de veces; por ejemplo, 16 es divisible entre 2 porque lo contiene exactamente 8 veces $\left(\frac{16}{2} = 8\right)$.

Considerando el ejemplo anterior, se dice que 16 es un *múltiplo* de 2, o que 2 es un *divisor* de 16, o también que 2 es un *factor* o *submúltiplo* de 16. De acuerdo con ello, precisemos que los conceptos *divisible entre* y *múltiplo de* tienen un mismo significado.

Un número natural tiene un conjunto infinito de múltiplos. Por ejemplo, los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 15, . . . , así sucesivamente hasta el infinito. Como puedes observar, los múltiplos de 3 se obtienen al multiplicarlo por los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5, . . .}. En general, si n es un número natural, entonces sus múltiplos son $\{1 \times n, 2 \times n, 3 \times n, \ldots\}$. Cabe señalar que el número $2n$ es par, mientras que el representado por las expresiones $2n + 1$ y $2n - 1$ es impar.

Ejemplo 1

Determina los primeros ocho múltiplos de 4.

Solución

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 \text{ y } 32\}$$

Principios de divisibilidad

A continuación mencionaremos los principios fundamentales de la divisibilidad y más adelante sus características.

Primer principio de divisibilidad

Si un número divide a dos o más números, entonces también divide a su suma. Por ejemplo, 3 divide a 12, 21 y 15; por tanto, también divide al número 48 $(12 + 21 + 15 = 48)$.

Segundo principio de divisibilidad

Todo número que divide a otro divide también a sus múltiplos. Por ejemplo, el número 4 es divisor de 8; por ende, también lo es de los números 16, 24, 32, 40…

Tercer principio de divisibilidad

Si un número divide a dos números, entonces también es divisor de su diferencia. Por ejemplo, 5 es divisor de los números 20 y 35; luego, también lo es del número 15 ($35 - 20 = 15$).

Cuarto principio de divisibilidad

Todo número que divide al divisor y al residuo de una división también divide al dividendo. Por ejemplo, el cociente de la división $38 \div 6$ es 6 y su residuo es 2. En este caso, el 2 divide al divisor 6, al residuo 2 y, por tanto, es divisor del dividendo 38.

Características de la divisibilidad

Las características de la divisibilidad forman un conjunto de reglas que permiten determinar si un número es divisible entre otro.

Entre las reglas de mayor uso se hallan las descritas a continuación.

Divisibilidad entre 2

Un número es divisible entre 2 cuando su última cifra es un número par o cero; por ejemplo:

24, 10, 86, 128, 4216, 4280, etcétera.

Divisibilidad entre 3

Un número es divisible entre 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es un múltiplo de 3. Por ejemplo, 423 es divisible entre 3, ya que $4 + 2 + 3 = 9$, el cual es un múltiplo de 3 ($9 = 3 \times 3$).

Divisibilidad entre 4

Un número es divisible entre 4 cuando sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 4; por ejemplo:

200, 4200, 812, 936, 108, etcétera.

Divisibilidad entre 5

Un número es divisible entre 5 cuando su última cifra termina en cero o en 5; por ejemplo:

35, 40, 115, 120, etcétera.

Divisibilidad entre 6

Un número es divisible entre 6 cuando es divisible entre 2 y entre 3; es decir, cuando termina en cero o en cifra par y la suma de los valores absolutos de sus cifras es un múltiplo de 3. Por ejemplo, 3120 y 282.

3120 termina en cero y $3 + 1 + 2 + 0 = 6$ es múltiplo de 3.

282 termina en número par (2) y $2 + 8 + 2 = 12$ es múltiplo de 3.

Divisibilidad entre 7

Una técnica para probar si un número es divisible entre 7 es la siguiente. Supón que necesitas comprobar que 38 409 es divisible entre 7. ¿Cómo lo harías?

- 38 409 es divisible entre 7 si $3840 - 2(9) = 3822$ lo es.
- 3822 es divisible entre 7 si $382 - 2(2) = 378$ lo es.
- 378 es divisible entre 7 si $37 - 2(8) = 21$ lo es.

Como $\frac{21}{7} = 3$ entonces 38 409 es divisible entre 7.

Divisibilidad entre 8

Un número es divisible entre 8 cuando sus tres últimas cifras son ceros o el número que se forma con estas tres últimas cifras es múltiplo de 8. Por ejemplo

$$34\,000\ (34\,000 \div 8 = 4250);\ 84\,632\ (632 \div 8 = 79)$$

Divisibilidad entre 9

Un número es divisible entre 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9. Por ejemplo:

$$918 \text{ porque } 9 + 1 + 8 = 18;\ 513 \text{ porque } 5 + 1 + 3 = 9$$

Divisibilidad entre 11

Un número es divisible entre 11 cuando al sustraer la suma de los valores absolutos de las cifras que ocupan un lugar par, de la suma de los valores absolutos de las cifras que ocupan un lugar impar, en el sentido de derecha a izquierda, se obtiene cero o un múltiplo de 11, es decir

$$\begin{array}{c} \text{Suma de los valores} \\ \text{absolutos de las cifras} \\ \text{que ocupan un lugar impar} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Suma de los valores} \\ \text{absolutos de las cifras} \\ \text{que ocupan un lugar par} \end{array} = \begin{array}{c} \text{cero o es un} \\ \text{número} \\ \text{múltiplo de 11} \end{array}$$

Ejemplo 2

El ejemplo que sigue te ayudará a entender mejor la divisibilidad entre 11. Determina si los números siguientes son múltiplos o divisibles entre 11.

a. 1364

Solución

Las cifras de lugar par de derecha a izquierda son 6 y 1, los cuales se suman: $6 + 1 = 7$

Las cifras de lugar impar de derecha a izquierda son 4 y 3, los cuales también se suman: $4 + 3 = 7$.

Ahora se resta el primer resultado del segundo: $7 - 7 = 0$; por consiguiente, el número 1364 es un múltiplo de 11.

b. 25 817

Solución

Las cifras que ocupan lugar par de derecha a izquierda son 2 y 5, las cuales se suman: $5 + 1 = 6$.

Las cifras de lugar impar de derecha a izquierda son 7, 8 y 2, las cuales también se suman: $7 + 8 + 2 = 17$.

Ahora se resta el primer resultado del segundo: $17 - 6 = 11$; luego, el número 25 817 es divisible entre 11.

Números primos

Se llaman *números primos* aquellos que sólo son divisibles entre sí mismos y entre la unidad. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11… son números primos. Los números que no son primos se denominan *números compuestos*.

Para determinar el conjunto de los números primos desde 1 hasta otro número natural podemos utilizar el método conocido con el nombre de *criba de Eratóstenes,* el cual explicaremos a continuación mediante un ejemplo.

Ejemplo 3

Halla los números primos que hay entre 1 y 50.

Solución

Paso 1. Escribe en una tabla todos los números entre 1 y 50, ambos incluidos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Paso 2. Elimina todos los números pares mayores que 2 por ser múltiplos de este número.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Paso 3. El primer número primo después de 2 es 3; por consiguiente, a partir de su cuadrado, el 9 inclusive, se eliminan los números escritos tres a tres lugares, con lo cual quedan eliminados los múltiplos de 3.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Paso 4. El primer número primo después de 3 es 5; por consiguiente, a partir de su cuadrado, el 25 inclusive, se tachan los números 5 a 5 lugares, con lo que se suprimen los múltiplos de 5.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Paso 5. El primer número primo después de 5 es 7; por tanto, a partir de su cuadrado, el 49 inclusive, se tachan los números 7 a 7, con lo que quedan suprimidos los múltiplos de 7. En este ejemplo tachamos únicamente el número 49.

De acuerdo con el procedimiento seguido, los números primos entre 1 y 50 son:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$$

Para un intervalo mayor se siguen suprimiendo sucesivamente múltiplos de 11, 13, etcétera, hasta el límite indicado.

Descomposición de un número en sus factores primos

La descomposición en factores de un número es una operación de gran importancia que consiste en expresar ese número como el producto de sus factores primos.

Para descomponer en factores primos un número determinado se divide el número entre el menor de sus divisores primos; el cociente obtenido se divide también entre su divisor primo menor, y así sucesivamente hasta hallar un cociente que sea número primo. Es costumbre trazar una raya vertical de forma tal que en la parte superior izquierda se coloca el número que se va a descomponer en factores y, a la derecha, en la parte superior, el menor de sus factores primos; posteriormente, en la columna de la izquierda se escriben debajo del número dado los cocientes obtenidos y en la columna derecha los mínimos divisores primos de éstos.

Cabe aclarar que las características de la divisibilidad permiten determinar en cada caso los mínimos divisores primos de cada cociente.

Ejemplo 4

Descompón el número 8100 en sus factores primos.

Solución

- Como 8100 termina en cero, entonces es divisible entre 2 y entre 5; luego, su menor divisor primo es 2 ($8100 \div 2 = 4050$).
- Como 4050 termina en cero, entonces su mínimo factor primo también es 2 ($4050 \div 2 = 2025$).
- La suma de los dígitos del número 2025 es 9; entonces, es divisible entre 3 ($2025 \div 3 = 675$).
- La suma de los dígitos del número 675 es 18, el cual es un múltiplo de 3; así, el mínimo factor primo de 675 es 3 ($675 \div 3 = 225$).
- La suma de los dígitos del número 225 es 9; por consiguiente, su mínimo factor primo es 3 ($225 \div 3 = 75$).
- La suma de los dígitos del número 75 es 12, que es un múltiplo de 3; por ende, el mínimo divisor o factor primo de 75 es 3 ($75 \div 3 = 25$).
- La última cifra de 25 es 5; por tanto, este número es su mínimo divisor o factor primo ($25 \div 5 = 5$).
- El número 5 es un número primo. Por tanto, $8100 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$.

8100	2
4050	2
2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Entonces, la descomposición de 8100 en factores primos es

$$8100 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$$

Ejercicios 1

I. *Descompón en factores primos los números siguientes.*

1. 378

$2 \times 3^3 \times 7$

2. 525

$3 \times 5^2 \times 7$

3. 198

$2 \times 3^2 \times 11$

4. 700

$2^2 \times 5^2 \times 7$

5. 240

$2^4 \times 3 \times 5$

6. 756

$2^2 \times 3^3 \times 7$

7. 750

$2 \times 3 \times 5^3$

8. 630

$2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor número que es divisor de todos ellos, es decir, el mayor número que divide exactamente a cada uno de ellos y se designa por la sigla MCD. También recibe el nombre de *máximo factor común*.

Para hallar el MCD de dos o más números, éstos se descomponen en sus factores primos y se determina el producto de los factores comunes afectados con sus exponentes menores. Ese producto es el MCD buscado.

Ejemplo 5

Encuentra el máximo común divisor de los números

a. 120 *b.* 224 *c.* 500.

Solución

Descompongamos en factores primos los números indicados.

a.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

b.

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$224 = 2^5 \times 7$

c.

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$500 = 2^2 \times 5^3$

De acuerdo con las descomposiciones en factores primos, el único factor primo común a los tres productos es 2 y la mínima potencia de éste es 2. Por consiguiente:

$$\text{MCD}\ (120, 224, 500) = 2^2 = 4$$

Ejemplo 6

Encuentra el MCD de los números

a. 96 *b.* 160 *c.* 256.

Solución

a.

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$96 = 2^5 \times 3$

b.

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$160 = 2^5 \times 5$

c.

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$256 = 2^8$

De acuerdo con las descomposiciones en factores primos, el MCD es el número que resulta del producto 2^5, es decir, 32.

$$\text{MCD}\ (96, 160, 256) = 32$$

Algoritmo de Euclides

Otra técnica para hallar el MCD de dos enteros consiste en utilizar el algoritmo de la división. Esta técnica o método se llama *algoritmo de Euclides* y consiste en lo siguiente:

Para hallar el MCD de dos enteros a y b, con b mayor que a, se siguen estos pasos:

1. Se divide b entre a. Si el residuo es cero, entonces el MCD de a y b es a.
2. Si el residuo (r) de $b \div a$ no es cero, se divide a entre r. Si el nuevo residuo es cero, entonces r es el MCD de a y b; en caso de no ser así, se repite el proceso hasta obtener un cociente exacto; es decir, que el residuo sea cero y el divisor de dicha división es el MCD de a y b.

Ejemplo 7 Utiliza el algoritmo de Euclides para obtener el máximo común divisor (MCD) de los números 624 y 936.

Solución

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \cline{2-2} 624 & 936 \\ & 312 \end{array}$$

Como el residuo es diferente de cero, dividimos a continuación 624 entre 312

$$\begin{array}{r|l} & \;2 \\ \cline{2-2} 312 & 624 \\ & 000 \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces el divisor 312 es el MCD de 624 y 936. Lo representamos así:

$$\text{MCD }(624, 936) = 312$$

Para hallar el MCD de tres o más números, puede encontrarse por pares. Por ejemplo, si el MCD de a y b es d, y el de c y d es x, entonces el MCD de a, b y c es x.

Ejemplo 8 Halla el MCD de 84, 126, 210 utilizando el algoritmo de Euclides.

Solución

Hallemos primero el MCD de 84 y 126.

Solución

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \cline{2-2} 84 & 126 \\ & \;42 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \;2 \\ \cline{2-2} 42 & 84 \\ & 00 \end{array}$$

luego, el MCD de 84 y 126 es 42, es decir

$$\text{MCD }(84, 126) = 42$$

Hallemos a continuación el MCD de 42 y 210

$$\begin{array}{r|l} & \;5 \\ \cline{2-2} 42 & 210 \\ & \;00 \end{array}$$

Por consiguiente, el MCD de 42 y de 210 es 42 y, por tanto

$$\text{MCD }(84, 126, 210) = 42$$

Primos relativos

Cabe precisar que si el MCD de dos números es uno, entonces dichos números son *primos relativos* entre sí; por ejemplo, 3 y 5, 4 y 9, etcétera.

Ejercicios 2

I. *Halla el máximo común divisor de los números que se indican.*

1. 24 y 30.

6

2. 36 y 45.

9

3. 30, 42 y 54.

6

4. 32 y 40.

8

5. 75 y 100.

25

6. 144 y 520 (utiliza el algoritmo de Euclides).

8

7. 945 y 975 (utiliza el algoritmo de Euclides).

15

8. 240 y 252 (utiliza el algoritmo de Euclides).

12

9. 15 y 30 (por inspección).

15

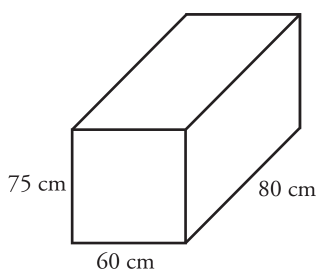
10. 6, 12 y 18 (por inspección).

6

II. *Resuelve los problemas siguientes.*

11. ¿Cuál es la mayor longitud que debe tener una regla para que pueda medir exactamente las dimensiones del prisma siguiente?

a. 3 cm
b. 5 cm
c. 4 cm
d. 6 cm



12. Una persona camina un número exacto de pasos recorriendo 464, 8120 y 870 cm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

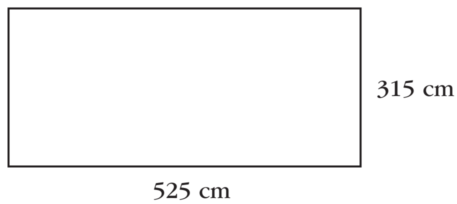
a. 56 cm
b. 60 cm
c. 58 cm
d. 62 cm

c. 58 cm

---

13. ¿Cuál es la mayor longitud de una regla que permita medir exactamente las dimensiones del rectángulo siguiente?

a. 105 cm
b. 75 cm
c. 115 cm
d. 95 cm



c. 115 cm

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números es el menor de todos los múltiplos comunes a todos ellos. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 4, 5 y 8 es el número 40, lo que se representa como MCM (4, 5, 8) = 40.

Para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más números primero hay que descomponer éstos en factores primos. El número que resulta del producto de todos los factores primos obtenidos afectados por su máxima potencia es el MCM.

Ejemplo 9 Determina el mínimo común múltiplo de los números 8, 10 y 12.

Solución

Descompongamos los números en sus factores primos.

8	2
4	2
2	2
1	

10	2
5	5
1	

12	2
6	2
3	3
1	

$8 = 2^3$ $\qquad 10 = 2 \times 5$ $\qquad 12 = 2^2 \times 3$

Los factores primos que aparecen en las descomposiciones anteriores son 2, 3 y 5, cuyas máximas potencias son 3, 1 y 1, respectivamente. El mínimo común múltiplo buscado es el número que resulta del producto $2^3 \times 3 \times 5$, es decir, 120, y lo expresamos así:

$$\text{mcm}\ (8, 10, 12) = 120$$

Ejemplo 10

Determina el mínimo común múltiplo de los números 28, 49 y 84.

Solución

Descompongamos en sus factores primos los números indicados.

28	2
14	2
7	7
1	

49	7
7	7
1	

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$28 = 2^2 \times 7$ $\quad 49 = 7^2$ $\quad 84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Los factores primos que aparecen son 2, 3 y 7, y sus máximas potencias son 2, 1 y 2, respectivamente; por tanto:

$$\text{mcm}\ (28, 49, 84) = 2^2 \times 3 \times 7^2 = 588$$

Ejercicios 2

I. *Encuentra el mínimo común múltiplo de los números indicados.*

1. 64, 96 y 108.

1728

2. 7, 14 y 21.

42

3. 3, 18 y 36.

36

4. 15, 21 y 42.

210

5. 96 y 126.

2016

8. 16, 20 y 24.

240

6. 36 y 96.

288

9. 84 y 120.

840

7. 24, 60 y 80.

240

10. 124 y 160.

4960

II. *Resuelve los problemas siguientes.*

11. Una persona tiene que ir de Monterrey a Cadereyta cada cuatro días. Después tiene que ir de Monterrey a Escobedo cada cinco días y, finalmente, de Monterrey a Santa Catarina cada ocho días. ¿Cuántos días deben transcurrir para que vaya a las tres ciudades el mismo día, si hoy estuvo en cada una de ellas?

40 días

12. Se colocan marcas azules, rosas y verdes en el piso cada 20, 25 y 30 cm, respectivamente. Si se colocan todas las marcas juntas al principio, ¿a qué distancia vuelven a coincidir?

3 m

13. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que se requiere para comprar un número exacto de libros cuyo precio unitario es de \$8, \$10, \$12 y \$25, respectivamente?

\$600

Evaluación

I. *Aplica las características de la divisibilidad para resolver los ejercicios 1 a 4.*

1. El número 7680 es divisible entre:

a. Únicamente 2
b. Únicamente 3
c. Únicamente 5
d. 2 y 5
e. 2, 3 y 5

2. El número 27 016 es divisible entre:

a. Únicamente 2
b. Únicamente 4
c. 9
d. Únicamente 2 y 4
e. 2, 4 y 11

3. Determina la suma de los valores absolutos que puede tomar la cifra x, para que el número $75x38$ sea múltiplo de 6.

a. 12
b. 10
c. 14
d. 8
e. 11

4. Determina la suma de los valores absolutos que puede tomar la cifra n, para que el número $74n6$ sea múltiplo de 4.

a. 34
b. 25
c. 32
d. 29
e. 30

II. *En los ejercicios 5 y 6, determina el máximo común divisor (MCD) de los números que se indican.*

5. 90, 72 y 54
a. 20
b. 25
c. 12
d. 40
e. 18

e. 18

6. 12, 18 y 30
a. 6
b. 9
c. 3
d. 10
e. 4

a. 6

III. E*n los ejercicios 7 a 9, halla el mínimo común múltiplo (MCM) de los números que se indican.*

7. 24, 27 y 36
a. 216
b. 240
c. 346
d. 236
e. 205

a. 216

8. 14, 40 y 56
a. 210
b. 280
c. 320
d. 560
e. 380

b. 280

9. 3, 18 y 36

a. 18
b. 72
c. 108
d. 96
e. 36

e. 36

IV. *Resuelve los problemas siguientes.*

10. Roberto camina un número exacto de pasos andando 425, 800 y 950 centímetros (cm). ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

a. 35 cm

b. 75 cm

c. 50 cm

d. 25 cm

c. 50 cm

---

11. La catedral de la ciudad de Zacatecas tiene tres campanas. La mayor suena cada hora, la mediana cada 50 minutos y la más pequeña cada 40 minutos. Si a las 6:00 de la mañana suenan todas a la vez, ¿a qué hora volverá a coincidir el sonido de las tres campanas?

a. 15:00

b. 14:00

c. 16:00

d. 17:00

5

Números racionales

- Fracciones
- Simplificación de fracciones
- Operaciones con números racionales
- Multiplicación de fracciones
- División de fracciones
- Expresión de una fracción en forma de número decimal

Un número racional es el que puede expresarse como el cociente de dos enteros; por ejemplo, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, 6 etcétera. Cabe precisar que todo número entero es un número racional, ya que puede expresarse como el cociente de dicho número entre uno; por ejemplo, $7 = \frac{7}{1}$.

Números racionales

Si m y n son dos números enteros, el conjunto de los números racionales representados por el símbolo Q se define como sigue:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, \text{donde } n \neq 0 \right\}$$

Interpretación de un número racional

Podemos dar a cada número racional los significados o interpretaciones siguientes:

- La interpretación de división.
- La interpretación de fracción o partición.
- La interpretación de razón.
- La interpretación de porcentaje.

En la figura 1 se muestra un diagrama que presenta las ideas asociadas con las interpretaciones que pueden darse a un número racional.

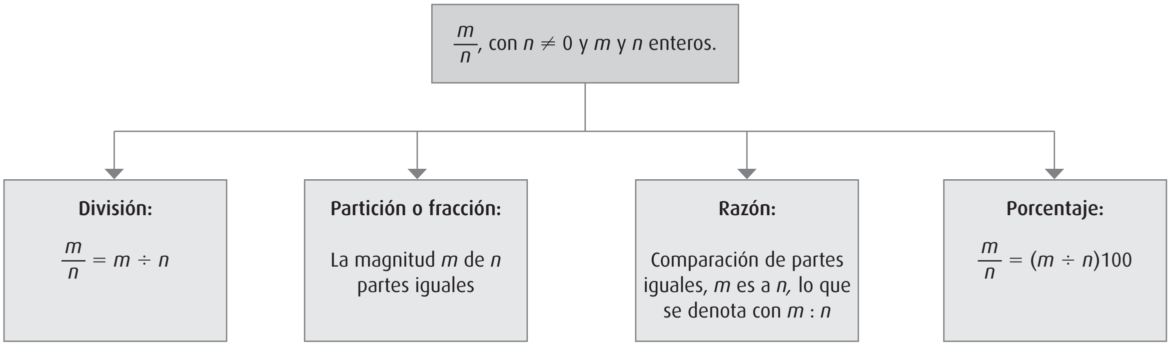


Figura 1. Interpretaciones que pueden darse a un número racional.

Fracciones

Definamos a continuación algunos conceptos relacionados con las fracciones.

Cuando se da al número racional $\frac{m}{n}$ una interpretación de fracción, el número m recibe el nombre de *numerador* y n el de *denominador*. Como hemos señalado al suponer esta interpretación, $\frac{m}{n}$ significa m partes de n partes iguales; así, por ejemplo:

- $\frac{5}{2}$ significa cinco partes de dos partes iguales y se lee "cinco medios".
- $\frac{1}{3}$ significa una parte de tres partes iguales y se lee "un tercio".
- $\frac{2}{4}$ significa dos partes de cuatro partes iguales y se lee "dos cuartos".

Fracciones propias e impropias

Cuando el numerador de una fracción es menor que el denominador decimos que se trata de una *fracción propia*; por ejemplo, $\frac{4}{9}$.

En cambio, una *fracción impropia* es aquella en la que el numerador es mayor o igual que el denominador; por ejemplo, $\frac{12}{7}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ etcétera.

Número mixto

Un número mixto es el que se compone de un entero y una fracción; por ejemplo, $1\frac{3}{5}$, $4\frac{2}{3}$ etcétera. El número $4\frac{5}{6}$ se lee "cuatro enteros y cinco sextos" y significa lo siguiente

$$4\tfrac{5}{6} = 4 + \tfrac{5}{6}$$

Expresión de un número mixto en forma de fracción

Todo número mixto puede expresarse en forma de fracción impropia aplicando esta regla:

$$k\frac{m}{n} = \frac{kn + m}{n}, \text{ donde } n, m \text{ y } k \text{ son enteros y } n \neq 0$$

Ejemplo 1

Expresa el número mixto $2\frac{5}{3}$ en forma de fracción.

Solución

$$2\tfrac{5}{3} = \tfrac{2(3) + 5}{3} = \tfrac{6 + 15}{3} = \tfrac{11}{3}$$

Asimismo, una fracción impropia puede expresarse como un número mixto si se aplica la regla siguiente:

$$\frac{m}{n} = C\frac{r}{n} \quad \text{donde } m, n, C \text{ y } r \text{ son enteros.}$$

Cabe precisar que C es el cociente que resulta al dividir m entre n y r es el residuo.

Ejemplo 2

Expresa la fracción impropia $\frac{26}{3}$ como un número mixto.

Solución

$$n \leftarrow 3\overset{\displaystyle 8 \rightarrow c}{\overline{\big)\,26}} \rightarrow m; \qquad \text{luego: } \frac{26}{3} = 8\,\frac{2}{3}$$
$$2 \rightarrow r$$

Fracciones homogéneas y fracciones heterogéneas

Dos o más fracciones son *homogéneas* si tienen el mismo denominador, como en los ejemplos siguientes

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5} \quad \text{o} \quad \frac{6}{x}, \frac{2}{x}, \frac{y}{x}, \ldots$$

Por su parte, dos o más fracciones son *heterogéneas* si todas tienen diferentes denominadores; por ejemplo

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{x}, \frac{2}{2x}, \ldots$$

Fracciones equivalentes

Decimos que las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{a}{b}$ con n y b diferentes de cero (es decir, n y $b \neq 0$) son *equivalentes* cuando representan el mismo número, lo cual se cumple si y sólo si $mb = an$.

Ejemplo 3

a. Determina si las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{16}{24}$ son equivalentes.

Solución

$$\begin{aligned} 2(24) &= 48 \\ 3(16) &= 48 \\ 48 &= 48 \end{aligned}$$

Por tanto, estas fracciones sí son equivalentes

b. Determina si las fracciones $\frac{7}{4}$ y $\frac{34}{20}$ son equivalentes.

Solución

$$\begin{aligned} 7(20) &= 140 \\ 4(34) &= 136 \\ 140 &\neq 136 \end{aligned}$$

Luego, estas fracciones no son equivalentes.

c. Escribe tres fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$.

Solución

Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por un mismo número entero diferente de cero, se obtiene otra fracción equivalente a ella; por ejemplo, $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{6}{15}$; o sea $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

En general, las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{km}{kn}$ son equivalentes si k es un entero diferente de cero.

Lo anterior es válido, ya que todo número multiplicado por 1 es igual a sí mismo, y $\frac{k}{k} = 1$ si $k \neq 0$.

De acuerdo con lo anterior, tenemos que

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{8}{10}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{12}{15}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{16}{20}$$

Entonces, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{15}$ y $\frac{16}{20}$ son equivalentes a $\frac{4}{5}$ e igualmente entre sí. Siguiendo el mismo método podemos hallar un conjunto infinito de fracciones equivalentes a cualquier fracción.

Ejercicios 1

I. *Escribe los números mixtos siguientes como fracciones impropias (relaciona correctamente las columnas).*

1. $4\frac{3}{5}$ ( ) *a.* $\frac{43}{2}$

2. $8\frac{3}{4}$ ( ) *b.* $\frac{22}{9}$

3. $6\frac{3}{5}$ ( ) *c.* $\frac{35}{4}$

4. $5\frac{2}{7}$ ( ) *d.* $\frac{37}{7}$

5. $1\frac{1}{2}$ ( ) *e.* $\frac{18}{7}$

6. $2\frac{4}{7}$ ( ) *f.* $\frac{3}{2}$

7. $21\frac{1}{2}$ ( ) *g.* $\frac{23}{5}$

8. $2\frac{4}{9}$ ( ) *h.* $\frac{37}{9}$

i. $\frac{33}{5}$

II. *Escribe las siguientes fracciones impropias como un número mixto (relaciona correctamente las columnas).*

9. $\frac{21}{2}$ ( )	*a.* $12\frac{1}{3}$
10. $\frac{48}{5}$ ( )	*b.* $14\frac{2}{3}$
11. $\frac{23}{3}$ ( )	*c.* $6\frac{3}{7}$
12. $\frac{50}{4}$ ( )	*d.* $11\frac{1}{2}$
13. $\frac{17}{5}$ ( )	*e.* 4
14. $\frac{44}{3}$ ( )	*f.* $9\frac{3}{5}$
15. $\frac{47}{7}$ ( )	*g.* $7\frac{3}{4}$
16. $\frac{25}{6}$ ( )	*h.* $12\frac{1}{2}$
17. $\frac{23}{2}$ ( )	*i.* $4\frac{1}{6}$
18. $\frac{29}{6}$ ( )	*j.* $10\frac{1}{2}$
19. $\frac{57}{4}$ ( )	*k.* $3\frac{2}{5}$
20. $\frac{31}{4}$ ( )	*l.* $14\frac{1}{4}$
	m. $7\frac{2}{3}$
	n. $6\frac{5}{7}$
	o. $9\frac{2}{5}$
	p. $4\frac{5}{6}$

III. *Determina en cuál de las siguientes listas los números están ordenados de menor a mayor.*

21. *a.* $\frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{13}, \frac{4}{7}$

b. $\frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{7}{13}, \frac{4}{7}$

c. $\frac{7}{13}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$

d. $\frac{7}{13}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}$

22. *a.* $\frac{7}{9}, \frac{75}{91}, \frac{4}{5}, \frac{23}{29}$

b. $\frac{7}{9}, \frac{75}{91}, \frac{23}{29}, \frac{4}{5}$

c. $\frac{7}{9}, \frac{23}{29}, \frac{75}{91}, \frac{4}{5}$

d. $\frac{7}{9}, \frac{23}{29}, \frac{4}{5}, \frac{75}{91}$

IV. *Resuelve los ejercicios siguientes.*

23. Determina cuál de estas fracciones es equivalente a $\frac{4}{5}$.

a. $\frac{28}{35}$

b. $\frac{24}{30}$

c. $\frac{56}{70}$

d. $\frac{48}{60}$

e. Todas son equivalentes

24. Determina cuál de las expresiones racionales siguientes es una fracción equivalente a $\frac{3}{7}$.

a. $\frac{48}{112}$

b. $\frac{45}{105}$

c. $\frac{24}{58}$

d. *a* y *b*

25. Determina cuál de estas fracciones equivale a $\frac{5}{9}$.

a. $\frac{18}{42}$

b. $\frac{60}{117}$

c. $\frac{20}{36}$

d. $\frac{15}{26}$

26. Determina cuál de las expresiones racionales siguientes es una fracción equivalente a $\frac{3}{2}$.

a. $\frac{27}{4}$

b. $\frac{9}{4}$

c. $\frac{42}{28}$

d. $\frac{51}{36}$

27. Determina cuál de estas expresiones racionales equivale a $\frac{7}{8}$.

a. $\frac{84}{96}$

b. $\frac{49}{64}$

c. $\frac{35}{42}$

d. $\frac{63}{74}$

Simplificación de fracciones

Un número racional expresado en forma de fracción está en forma reducida o simplificada si el máximo común divisor (MCD) de su numerador y denominador es 1.

La simplificación o reducción de fracciones es una de las operaciones matemáticas más importantes y fundamentalmente hay dos métodos para realizarla.

El primero consiste en descomponer en factores primos el numerador y el denominador de la fracción que se va a simplificar y a continuación cancelar los factores comunes a ambos utilizando esta ley de los exponentes:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{si } x > y$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^0 = 1 \quad \text{si } x = y$$
$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{1}{a^{y-x}} \quad \text{si } x < y$$

Ejemplo 4

Reduce (simplifica) la fracción $\frac{144}{540}$.

Solución

Descompongamos los números 144 y 540 en sus factores primos.

	2	2	2	2	3	3
144	72	36	18	9	3	1

$\Rightarrow \quad 144 = 2^4(3)^2$

	2	2	3	3	3	5
540	270	135	45	15	5	1

$\Rightarrow \quad 540 = 2^2(3)^3 5$

De acuerdo con lo anterior, tenemos

$$\frac{144}{540} = \frac{2^4(3)^2}{2^2(3)^3(5)} = \frac{2^{4-2}}{3^{3-2}(5)} = \frac{2^2}{3(5)} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{144}{540} = \frac{4}{15}$$

El segundo método para reducir fracciones se basa en hallar el MCD de dos enteros utilizando el algoritmo de Euclides. La forma reducida de la fracción $\frac{m}{n}$ se reconoce fácilmente cuando obtenemos $\frac{m}{n} = \frac{ad}{bd}$ donde d es el MCD de m y n, o sea, la expresión reducida $\frac{m}{n}$ es $\frac{a}{b}$

Ejemplo 5 Simplifica la fracción $\frac{3150}{2520}$ utilizando el algoritmo de Euclides.

Solución

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 2520 & 3150 \\ & 0630 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 630 & 2520 \\ & 000 \end{array}$$

Como el residuo de la última división es cero, entonces 630 es el MCD de 3150 y 2520.

De acuerdo con lo anterior, tenemos

$$\frac{3150}{630} = 5 \Rightarrow 3150 = 630(5)$$
$$\frac{2520}{630} = 4 \Rightarrow 2520 = 630(4)$$

Por consiguiente

$$\frac{3150}{2520} = \frac{\cancel{630}(5)}{\cancel{630}(4)} = \frac{5}{4}.$$

La expresión reducida o simplificada de $\frac{3150}{2520}$ es $\frac{5}{4}$.

Es recomendable emplear el segundo método (ilustrado en el ejemplo anterior) para simplificar fracciones en las que el numerador y el denominador son números relativamente grandes.

Ejercicios 2

I. *Simplifica las fracciones siguientes (escribe en el paréntesis el inciso que contiene la respuesta correcta en cada caso).*

1. $\frac{60}{72}$ ( )	2. $\frac{96}{144}$ ( )	3. $\frac{270}{150}$ ( )
4. $\frac{60}{135}$ ( )	5. $\frac{72}{144}$ ( )	6. $\frac{120}{36}$ ( )

7. $\frac{98}{56}$ ( )	8. $\frac{125}{750}$ ( )	9. $\frac{126}{84}$ ( )

a. $\frac{1}{6}$ *b.* $\frac{1}{2}$ *c.* $\frac{4}{9}$ *d.* $\frac{7}{4}$ *e.* $\frac{9}{5}$

f. $\frac{5}{6}$ *g.* $\frac{11}{5}$ h. $\frac{10}{3}$ *i.* $\frac{11}{3}$ *j.* $\frac{3}{2}$

k. $\frac{2}{3}$ *l.* $\frac{4}{9}$ *m.* $\frac{9}{4}$

Operaciones con números racionales

Como recordarás, con las fracciones es posible realizar las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división. En las secciones siguientes se explica cómo hacerlo, se dan ejemplos para que lo comprendas cabalmente y se proponen ejercicios para que practiques lo aprendido.

Suma de fracciones

En la suma de fracciones pueden presentarse dos casos: que éstas sean homogéneas o que sean heterogéneas.

Suma de fracciones homogéneas

Cuando las fracciones son homogéneas, la suma de éstas es otra fracción que tiene como numerador la suma de cada una de las fracciones y como denominador el común a todas ellas. Por ejemplo

$$\tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{7}{5} = \tfrac{3+4+7}{5} = \tfrac{14}{5} \qquad \text{o} \qquad \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{2}{10} = \tfrac{6}{10} = \tfrac{(6 \div 2)}{(10 \div 2)} = \tfrac{3}{5}$$

En general

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \cdots + \frac{k}{n} = \frac{a+b+c+\cdots+k}{n}$$

Suma de fracciones heterogéneas

Para sumar fracciones de distinto denominador primero hay que transformarlas de manera tal que quedan expresadas como fracciones homogéneas y a continuación aplicar la regla de la suma de fracciones homogéneas antes mencionada.

De la naturaleza del *común denominador* de las fracciones homogéneas se deduce que éste debe contener a todos los denominadores, lo que significa que debe ser un múltiplo común de todos ellos. Obviamente, para facilitar las operaciones se busca que el múltiplo común sea el menor, al cual le llamaremos *mínimo común denominador*.

> *Mínimo común denominador*
>
> El mínimo común denominador de dos o más denominadores es el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Para efectuar la suma de fracciones no homogéneas se siguen estos pasos:

1. Simplifica las fracciones que se van a sumar, en caso de ser posible.
2. Halla el mínimo común denominador.
3. Divide el mínimo común denominador entre cada denominador. El cociente obtenido se multiplica por el numerador respectivo.
4. La suma de las fracciones es otra que tiene como numerador la suma de los productos obtenidos en el paso 3 y como denominador el obtenido en el paso 2.
5. Simplifica, en caso de ser necesario, la fracción que resulte de la suma.

Ejemplo 6

Efectúa la suma de fracciones siguientes:

a. $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{3}{20}$

Solución

Paso 1. Se simplifican las fracciones que van a sumarse; en este caso las tres fracciones son irreducibles.

Paso 2. Descompongamos ahora en sus factores primos 4, 8 y 5 para hallar el mínimo común denominador.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 10 & 2 \\ \hline 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

$$4 = 2^2 \qquad 8 = 2^3 \qquad 10 = 2(5)$$

De acuerdo con lo anterior, el mínimo común denominador es $2^3(5) = 40$, de donde

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{4}{20}=\frac{\left(\frac{40}{4}\right)3+\left(\frac{40}{8}\right)7+\left(\frac{40}{20}\right)3}{40}=\frac{30+35+6}{40}=\frac{71}{40}$$

Como 71 y 40 no tienen factores comunes, la fracción $\frac{71}{40}$ es irreductible, es decir, está simplificada.

b. $\frac{2}{3}+\frac{11}{12}+\frac{1}{6}$

Solución

Observa que 12 es múltiplo de 3 y 6; por consiguiente, el mínimo común denominador de 3, 12 y 6 es 12.

$$\frac{2}{3}+\frac{11}{12}+\frac{1}{6}=\frac{\left(\frac{12}{3}\right)2+\left(\frac{12}{12}\right)11+\left(\frac{12}{6}\right)1}{12}=\frac{8+11+2}{12}=\frac{21}{12}$$

Fácilmente observamos que 21 y 12 son divisibles entre 3, por tanto

$$\frac{21}{12} = \frac{(21 \div 3)}{(12 \div 3)} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{11}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{4}$$

Ejercicios 3

I. *Efectúa las sumas indicadas y simplifica (relaciona correctamente las columnas).*

1. $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12}$ ( )	**2.** $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + \frac{1}{8}$ ( )	**3.** $2\frac{1}{8} + 1\frac{3}{16} + \frac{5}{12}$ ( )
4. $\frac{7}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$ ( )	**5.** $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$ ( )	**6.** $\frac{3}{8} + 3\frac{5}{12}$ ( )
7. $\frac{5}{12} + \frac{5}{6}$ ( )	**8.** $\frac{4}{7} + \frac{2}{5}$ ( )	**9.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$ ( )
10. $\frac{1}{4} + \frac{9}{5} + 3$ ( )	**11.** $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 4$ ( )	**12.** $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10}$ ( )

a. $\frac{5}{18}$ *b.* $\frac{7}{4}$ *c.* $\frac{5}{6}$ *d.* $\frac{6}{7}$ *e.* $\frac{91}{24}$ *f.* $\frac{5}{4}$

g. $\frac{3}{4}$ *h.* $\frac{34}{35}$ *i.* $\frac{63}{20}$ *j.* $\frac{179}{48}$ *k.* $\frac{27}{8}$ *l.* $5^{5/12}$

m. $\frac{101}{20}$ *n.* $2\frac{1}{10}$ *o.* $5\frac{1}{7}$ *p.* $\frac{107}{21}$ *q.* $5\frac{3}{20}$

II. *Resuelve los problemas siguientes.*

13. Carlos compra acciones de la compañía Yale S.A. de C.V. a $\$75\frac{1}{4}$ cada una. Si el valor de cada acción aumenta $\$2\frac{5}{8}$, ¿cuál es el valor actual de cada una de ellas?

a. $\$\dfrac{623}{8}$

b. $\$\dfrac{625}{8}$

c. $\$\dfrac{621}{8}$

d. $\$\dfrac{627}{8}$

a. $\$\dfrac{623}{8}$

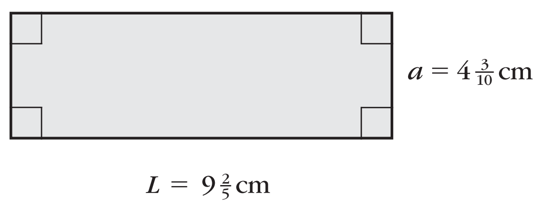
14. Calcula el perímetro del rectángulo de la figura siguiente.

a. $\dfrac{134}{5}$ cm

b. $\dfrac{139}{5}$ cm

c. $\dfrac{138}{5}$ cm

d. $\dfrac{137}{5}$ cm



d. $\dfrac{137}{5}$ cm

15. Halla la distancia que recorre Chalo en tres días, si camina $4\frac{1}{2}$ kilómetros (km) durante el primer día, $3\frac{5}{8}$ el segundo y $3\frac{3}{4}$ el tercero.

a. $\dfrac{95}{8}$ km

b. $\dfrac{93}{8}$ km

c. $\dfrac{47}{4}$ km

d. $\dfrac{45}{4}$ km

a. $\dfrac{95}{8}$ km

Resta de fracciones

Igual que la suma de fracciones, en la resta se presentan dos casos: resta de fracciones homogéneas y resta de fracciones heterogéneas. En seguida se explica el primer caso.

Resta de fracciones homogéneas

La resta de la fracción $\frac{p}{n}$ de su fracción homogénea $\frac{m}{n}$ está dada por $\frac{m-p}{n}$ es decir:

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}$$

Ejemplo 7

Resta $\frac{2}{12}$ de $\frac{10}{12}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{10}{12}-\frac{2}{12}&=\frac{10-2}{12}\\&=\frac{8}{12}\\&=\frac{(8\div 2)}{(12\div 3)}\\&=\frac{2}{3}\\\frac{10}{12}-\frac{2}{12}&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Resta de fracciones heterogéneas

Para efectuar restas de fracciones heterogéneas se procede en forma análoga que en la suma. Efectúa las restas indicadas y simplifica.

Ejemplo 8

a. $\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$

Solución

Como ahora sabes, 2 y 5 son números primos; por consiguiente, su mínimo común múltiplo es su producto, o sea 10, de donde:

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}=\frac{\left(\frac{10}{2}\right)3-\left(\frac{10}{5}\right)4}{10}=\frac{15-8}{10}=\frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$$

b. $\frac{4}{5}-\frac{2}{10}$

Solución

En este caso, 10 es divisible por 5; luego, el mínimo común denominador de 5 y 10 es 10, de forma que

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{10}=\frac{\left(\frac{10}{5}\right)4-\left(\frac{10}{10}\right)2}{10}=\frac{8-2}{10}=\frac{6}{10}=\frac{(6\div 2)}{(10\div 2)}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{10}=\frac{3}{5}$$

Ejercicios 4

I. *Efectúa las restas indicadas y simplifica.*

1. $\frac{6}{9}-\frac{6}{15}$

a. 0

b. $\frac{4}{15}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{4}{15}$

2. $\frac{2}{3}-\frac{4}{18}$

a. $\frac{4}{9}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{5}{19}$

d. $\frac{2}{3}$

a. $\frac{4}{9}$

3. $\frac{12}{15}-\frac{8}{25}$

a. $\frac{11}{25}$

b. $\frac{14}{25}$

c. $\frac{7}{15}$

d. $\frac{12}{25}$

d. $\frac{12}{25}$

4. $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$

a. $\frac{2}{15}$

b. $\frac{1}{15}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{4}{15}$

a. $\frac{2}{15}$

5. $\frac{3}{8}-\frac{1}{12}$

a. $\frac{7}{24}$

b. $\frac{5}{12}$

c. $\frac{1}{4}$

d. $\frac{3}{8}$

a. $\frac{7}{24}$

6. $\frac{11}{10}-\frac{14}{15}$

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{2}{15}$

c. $\frac{1}{6}$

7. Resta $2\frac{3}{16}$ de $3\frac{11}{48}$.

a. $1\frac{7}{24}$

b. $1\frac{8}{48}$

c. $1\frac{1}{24}$

d. $1\frac{1}{48}$

e. $\frac{47}{48}$

c. $1\frac{1}{24}$

8. Resta $2\frac{2}{3}$ de $8\frac{9}{12}$.

a. $6\frac{2}{3}$

b. $6\frac{7}{12}$

c. $6\frac{1}{3}$

d. $6\frac{1}{6}$

e. $6\frac{1}{12}$

e. $6\frac{1}{12}$

9. Resta $27\frac{5}{14}$ de $43\frac{1}{6}$.

a. $15\frac{17}{21}$

b. $15\frac{1}{3}$

c. $15\frac{13}{21}$

d. $15\frac{3}{7}$

e. $15\frac{1}{48}$

a. $15\frac{17}{21}$

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus respectivos numeradores y cuyo denominador es también el producto de sus respectivos denominadores, es decir

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ donde } b \text{ y } d \neq 0$$

Cabe señalar que el resultado debe escribirse en forma simplificada.

Ejemplo 9

Efectúa la siguiente multiplicación de fracciones y simplifica.

$$\tfrac{7}{12} \times \tfrac{8}{14}$$

Solución

$$\tfrac{7}{12} \times \tfrac{8}{14} = \tfrac{7 \times 8}{12 \times 14} = \tfrac{56}{168}$$

Utilicemos el algoritmo de Euclides para simplificar la fracción $\frac{56}{168}$.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 3 \\ \hline 56 & 168 \\ & \ \ 00 \end{array}$$

De acuerdo con la división anterior, MCD(56, 168) = 56; luego

$$\tfrac{56}{168} = \tfrac{(56 \div 56)}{168 \div 56)} = \tfrac{1}{3}$$

$$\tfrac{7}{12} \times \tfrac{8}{14} = \tfrac{1}{3}$$

Ejercicios 5

I. *Efectúa las multiplicaciones de fracciones siguientes (escribe en el paréntesis el inciso que contiene la respuesta correcta en cada caso).*

1. $\frac{4}{15} \times \frac{3}{8}$ ( )

2. $\frac{12}{16} \times \frac{30}{18}$ ( )

3. $\left(2\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(5)$ ( )

4. $\left(6\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(5)$ ( )

5. $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$ ( )

6. $\frac{7}{10} \times \frac{8}{21}$ ( )

7. $\frac{16}{20} \times \frac{6}{8}$ ( )

a. $\frac{5}{3}$	*b.* $\frac{4}{5}$	*c.* $\frac{2}{3}$	*d.* $\frac{10}{3}$	*e.* $\frac{4}{15}$	*f.* $\frac{5}{4}$
g. $\frac{1}{10}$	*h.* $\frac{3}{5}$	*i.* $22\frac{1}{2}$	*j.* $24\frac{1}{2}$	*k.* $8\frac{2}{3}$	

II. *Resuelve los ejercicios siguientes (elige la opción correcta).*

8. Una persona camina a razón de $1\frac{2}{5}$ kilómetros (km) por hora durante $2\frac{6}{7}$ horas. ¿Qué distancia recorrió durante este tiempo?

a. 4 km

b. 15 km

c. $4\frac{1}{2}$ km

d. $3\frac{4}{7}$ km

a. 4 km

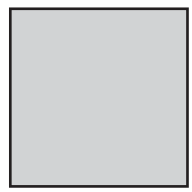
10. Calcula el área del cuadrado siguiente.

a. $\frac{119}{16}$ m^2

b. $\frac{11}{4}$ m^2

c. $\frac{123}{16}$ m^2

d. $\frac{121}{16}$ m^2



$L = 2\frac{3}{4}$ m

d. $\frac{121}{16}$ m^2

9. Calcula el área del rectángulo de la figura siguiente.

a. 96 cm^2

b. 110 cm^2

c. $\frac{650}{6}$ cm^2

d. $\frac{338}{3}$ cm^2

$6\frac{2}{3}$ cm

$16\frac{1}{2}$ cm

b. 110 cm^2

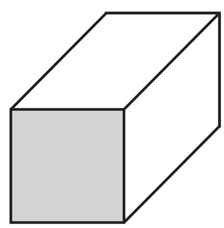
11. Calcula el volumen del cubo de la figura siguiente.

a. $\frac{15}{8}$ m^3

b. $\frac{135}{8}$ m^3

c. $\frac{15}{6}$ m^3

d. $\frac{125}{8}$ m^3



$2\frac{1}{2}$ m

d. $\frac{125}{8}$ m^3

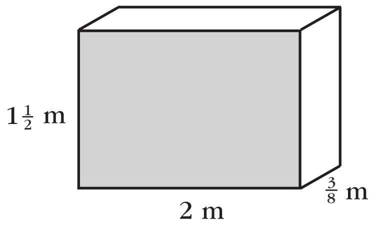
12. Calcula el volumen del prisma de la figura siguiente.

a. $\frac{9}{8}$ m^3

b. $\frac{1}{4}$ m^3

c. $\frac{1}{16}$ m^3

d. $\frac{3}{8}$ m^3



d. $\frac{3}{8}$ m^3

---

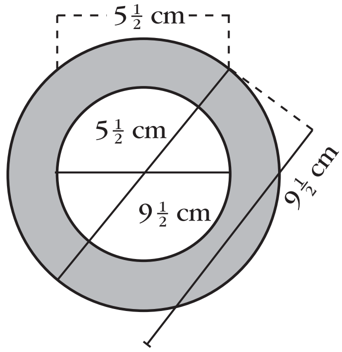
13. En la figura siguiente se muestra el corte transversal de un tubo. Si el diámetro exterior mide $9\frac{1}{2}$ cm y el interior $5\frac{1}{2}$ cm, calcula el área de la región sombreada.

a. 15π cm^2

b. 17π cm^2

c. 14π cm^2

d. 16π cm^2



a. 15π cm^2

---

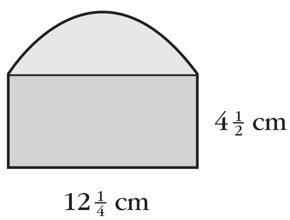
14. Un semicírculo se levanta sobre un rectángulo como se muestra en la figura siguiente. Calcula el área total de la superficie.

a. 119.16 cm^2

b. 64.74 cm^2

c. 114.0 cm^2

d. 118.21 cm^2



División de fracciones

Para dividir una fracción entre otra, la fracción dividendo se multiplica por el inverso multiplicativo de la fracción divisor; es decir

$$\frac{m}{n} \div \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{na}, \text{ donde } n, b \text{ y } a \text{ son diferentes de cero}$$

Ejemplo 10

Haz las divisiones de fracciones indicadas y simplifica el resultado.

a. $\frac{4}{9} \div \frac{5}{6}$

Solución

$$\frac{4}{9} \div \frac{5}{6} = \frac{4}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{4 \times 6}{9 \times 5} = \frac{(24 \div 3)}{(45 \div 3)} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{9} \div \frac{5}{6} = \frac{8}{15}$$

b. $\frac{8}{3} \div 4$

Solución

$$\frac{8}{3} \div 4 = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3(4)} = \frac{(8 \div 4)}{(12 \div 4)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} \div 4 = \frac{2}{3}$$

Ejercicios 6

I. *Haz estas divisiones de fracciones (escribe en el paréntesis el inciso que contiene la respuesta correcta en cada caso).*

1. $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$ **( )**	**2.** $3\frac{3}{4} \div 5$ **( )**	**3.** $\frac{8}{9} \div \frac{5}{12}$ **( )**
4. $5\frac{1}{3} \div \frac{8}{3}$ **( )**	**5.** $6\frac{3}{4} \div \frac{3}{2}$ **( )**	**6.** $\frac{16}{24} \div 8$ **( )**
7. $3\frac{1}{2} \div \frac{2}{5}$ **( )**	**8.** $8\frac{1}{2} \div 6\frac{3}{4}$ **( )**	

a. $\frac{32}{15}$	*b.* 2	*c.* $\frac{11}{2}$	*d.* $\frac{9}{2}$	*e.* $\frac{10}{9}$
f. $\frac{1}{12}$	*g.* $1\frac{7}{27}$	*h.* $\frac{3}{4}$	*i.* $8\frac{3}{4}$	*j.* $13\frac{3}{4}$

II. *Resuelve los problemas de aplicación de las fracciones siguientes.*

9. Se dispone de 60 litros de agua purificada. ¿Cuántas botellas se pueden llenar si la capacidad de cada una de ellas es de $\frac{3}{5}$ de litro?

a. 102
b. 104
c. 100
d. 98

c. 100

---

10. Un albañil pinta una pared con una rapidez de $7\frac{3}{4}$ metros cuadrados (m^2) por hora y otro a razón de $6\frac{3}{5}$ m^2 por hora. ¿Cuántos metros cuadrados de superficie pintan entre los dos en $2\frac{1}{2}$ horas?

a. $35\dfrac{7}{8}$ m^2

b. $35\dfrac{1}{8}$ m^2

c. $35\dfrac{1}{2}$ m^2

d. $35\dfrac{5}{8}$ m^2

a. $35\dfrac{7}{8}$ m^2

---

11. Un caminante recorre $2\frac{1}{3}$ kilómetros (km) durante la primera hora, $3\frac{1}{2}$ durante la segunda y $2\frac{2}{5}$ en la tercera. ¿Cuántos kilómetros recorrió en las tres horas?

a. $8\dfrac{7}{30}$ km

b. $8\dfrac{3}{10}$ km

c. $8\dfrac{1}{2}$ km

d. $8\dfrac{1}{6}$ km

a. $8\dfrac{7}{30}$ km

---

12. Una persona gasta $\frac{1}{5}$ de su sueldo en el pago de la renta de su vivienda, $\frac{3}{7}$ en alimentos, $\frac{1}{3}$ en otros gastos diversos y ahorra el resto. Si gana $21 000.00 mensuales, ¿cuánto ahorra por año?

a. $9000

b. $10 200

c. $9400

d. $9600

d. $9600

13. Un comerciante tiene una pieza de tela de 60 m y vende $\frac{2}{5}$ al mediodía y después $\frac{3}{4}$ del resto. ¿Cuántos metros de tela le quedan?

a. 12 m

b. 6 m

c. 10 m

d. 9 m

d. 9 m

14. Un obrero gana $25.00 por hora. ¿Cuánto debe cobrar si trabaja $14\frac{3}{5}$ horas?

a. $385

b. $365

c. $375

d. $390

b. $365

15. Si un tronco de madera de $6\frac{1}{4}$ m de longitud se corta en cinco partes iguales, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

a. 1.20 m

b. $1\dfrac{1}{2}$ m

c. $1\dfrac{1}{4}$ m

d. $1\dfrac{1}{5}$ m

c. $1\dfrac{1}{4}$ m

16. Si un kilogramo de frijol cuesta \$5.00, ¿cuánto cuestan $7\frac{3}{10}$ kg?

a. \$38.25
b. \$36.00
c. \$36.75
d. \$36.50

d. \$36.50

---

17. José gana \$12 000.00 mensuales. Si el monto de sus gastos al mes asciende a $\frac{4}{5}$ de su salario, ¿cuánto ahorra al año?

a. \$32 400
b. \$28 800
c. \$28 100
d. \$27 900

b. \$28 800

---

18. El costo unitario de una cerradura es de \$60.00. Si se desea que la ganancia sea $\frac{2}{5}$ de su precio de compra, ¿cuál debe ser su precio de venta?

a. \$84
b. \$90
c. \$80
d. \$86

a. \$84

---

19. Si se embotellan 18 000 litros de tequila en botellas que tienen capacidad de $\frac{3}{4}$ de litro, ¿cuántas botellas se llenan?

a) 26 000
b) 28 000
c) 24 000
d) 30 000

c. \$24 000

---

20. De un tambo de $40\frac{2}{3}$ litros de aceite se han vendido $28\frac{5}{6}$. ¿Cuántos litros quedan?

a. $11\frac{5}{6}$ l

b. $11\frac{2}{3}$ l

c. $11\frac{1}{3}$ l

d. $11\frac{1}{6}$ l

a. $11\frac{5}{6}$

Expresión de una fracción en forma de número decimal

De la interpretación del número racional $\frac{m}{n}$ como una división ($m \div n$) tenemos que puede expresarse como un numeral al efectuar tal operación.

Al dividir m entre n pueden presentarse las dos situaciones siguientes respecto al residuo.

Caso I. Que el residuo sea cero. En este caso el cociente obtenido es un número *decimal finito*.

Ejemplo 11 Expresa como decimal la fracción $\frac{7}{4}$.

Solución

$$\frac{7}{4} = 4\overline{\smash{)}7}\quad \begin{array}{l} 1.75 \\ 7 \\ 30 \\ \;\;20 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

$$\frac{7}{4} = 1.75$$

Caso II. La otra situación que puede presentarse es que la división no se acabe; es decir, que el residuo nunca sea cero, pero en el cociente hay cierto grupo de cifras consecutivas que se repiten en una sucesión infinita en el mismo orden.

Ejemplo 12 Expresa como número decimal la fracción $\frac{2}{11}$.

Solución

$$\frac{2}{11} = 11\overline{\smash{)}20}\quad \begin{array}{l} 0.1818 \\ 20 \\ 090 \\ \;\;020 \\ \;\;\;\;090 \end{array}$$

De la operación anterior tenemos que:

$$\frac{2}{11} = 0.1818\ldots \quad \text{o también} \quad \frac{2}{11} = 0.\overline{18},$$

donde los puntos y la barra indican que el grupo de cifras se repite infinitamente en ese orden.

El tipo de numerales como el del ejemplo anterior se llaman *decimales periódicos*.

El periodo de un decimal infinito periódico es la cifra o grupo de cifras que se repiten infinitamente.

Así, en el numeral periódico $0.\overline{6}$ el periodo es 6, en $0.\overline{45}$ es 45 y en $0.4\overline{125}$ es 125.

Si el periodo empieza en la cifra correspondiente a las décimas, entonces el decimal periódico es *puro* y si no, entonces es mixto.

Ejemplo 13 $0.\overline{85}$ decimal periódico puro.

$0.6\overline{3}$ decimal periódico mixto.

Del ejemplo anterior podemos inferir lo siguiente: el numeral correspondiente al número racional $\frac{a}{b}$ es un decimal finito o es un decimal periódico. La proposición inversa también es verdadera; es decir, todo número decimal finito y todo decimal periódico son números racionales.

En contraparte, todo número decimal de infinitas cifras, pero que no se repiten en el mismo orden, o sea, que no hay periodo, es un número irracional.

Todo número decimal infinito no periódico es un número irracional.

Expresión de un número decimal finito en forma de fracción

Para hallar la fracción equivalente a un número decimal finito se multiplica y divide ese número entre una potencia de base 10, cuyo exponente es igual al número de cifras que se localizan a la derecha del punto decimal.

Ejemplo 14

a. Expresa en forma de fracción el número 0.125.

Solución

$$0.125 = \frac{0.125(10^3)}{10^3} = \frac{125}{1000}$$

Al simplificar la fracción anterior resulta:

$$\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

Otro método es el siguiente:

$$0.125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$0.125 = \frac{100 + 20 + 5}{1000}$$

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

b. Expresa en forma de fracción el número 0.55.

Solución

$$0.55 = \frac{0.55(10^2)}{10^2}$$

$$0.55 = \frac{0.55(100)}{100}$$

$$0.55 = \frac{55}{100}$$

También:

$$0.55 = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} = \frac{50 + 5}{100} = \frac{55}{100}$$

Al simplificar $\frac{55}{100}$ resulta $\frac{11}{20}$ luego:

$$0.55 = \frac{11}{20}$$

Expresión de un número decimal periódico en forma de fracción

Consideremos primero el caso en que el periodo empieza en la cifra correspondiente a las décimas; por ejemplo, $0.\overline{6}$

Si x representa el número de cifras del periodo de un numeral periódico (n), entonces el producto de $10^x(n)$ tiene el mismo periodo que n; por ejemplo, si $n = 8.\overline{26}$, entonces $10^2(8.\overline{26}) = 826.\overline{26}$.

Con base en lo anterior, la expresión $10^x n - n$ representa un número entero; por ejemplo, si $n = 0.\overline{62}$, entonces tenemos que $x = 2$, luego:

$$10^x n - n = 10^2(0.\overline{62}) - 0.\overline{62}$$
$$10^x n - n = 62.\overline{62} - 0.\overline{62}$$
$$10^x n - n = 62$$

Asimismo, observa que de acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta tenemos que:

$$10^x n - n = n(10^x - 1)$$

Al dividir ambos miembros de la igualdad anterior entre $10^x - 1$ resulta:

$$\frac{10^x n - n}{10^x - 1} = \frac{n(10^x - 1)}{10^x - 1} \text{ de donde obtenemos}$$

$$n = \frac{10^x n - n}{10^x - 1}$$

De acuerdo con lo anterior, la forma fraccionaria del número periódico n se determina por la expresión $\frac{10^x n - n}{10^x - 1}$, donde x es el número de cifras del periodo de n. En nuestro ejemplo

$$n = \frac{10^2(0.\overline{62} - 0.\overline{62})}{10^2 - 1} = \frac{62}{99}$$

Ejemplo 15

Escribe en forma de fracción los números periódicos siguientes:

a. $0.\overline{8}$

Solución

$$n = \frac{n(10^x) - n}{10^x - 1}, \text{ donde } x = 1\text{; luego:}$$

$$n = \frac{0.\overline{8}(10^1) - 0.8}{10 - 1} = \frac{8.\overline{8} - 0.\overline{8}}{9} = \frac{8}{9}$$

$$0.\overline{8} = \frac{8}{9}$$

b. $0.\overline{156}$

$$n = \frac{n(10^x) - n}{10^x - 1}$$

$$n = \frac{0.\overline{156}(10^3) - 0.\overline{156}}{10^3 - 1} = \frac{156.\overline{156} - 0.\overline{156}}{999} = \frac{156}{999}$$

$$n = \frac{156}{999}$$

Simplifiquemos la fracción anterior utilizando el algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\;6 \\ \hline 156 & 999 \\ & 063 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{r|l} & \;\;\;2 \\ \hline 63 & 156 \\ & \;\;30 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{r|l} & \;2 \\ \hline 30 & 63 \\ & \;\;3 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{r|l} & 10 \\ \hline 3 & 30 \\ & 00 \end{array}$$

luego, MCD (156, 199) = 3. Por consiguiente

$$\frac{156}{999} = \frac{(156 \div 3)}{(999 \div 3)} = \frac{52}{333}$$

$$0.156 = \frac{\overline{156}}{999} = \frac{52}{333}$$

Veamos por medio de un ejemplo cómo hallar una fracción equivalente a un número periódico mixto.

Ejemplo 16

Expresa $0.6\overline{12}$ en forma de fracción.

Solución

Podemos reescribir el número anterior de esta forma:

$$0.6\overline{12} = 0.6 + 0.0\overline{12}, \text{ de donde}$$

$$0.6\overline{12} = \frac{6}{10} + \frac{0.\overline{12}}{10}$$

Hallemos a continuación la fracción equivalente a $0.\overline{12}$

$$0.\overline{12} = \frac{0.\overline{12}(10^2) - 0.\overline{12}}{10^2 - 1}$$

$$0.\overline{12} = \frac{12.\overline{12} - 0.\overline{12}}{99}$$

$$0.\overline{12} = \frac{12}{99}$$

Al simplificar resulta

$$0.\overline{12} = \frac{4}{33}$$

Regresando a la expresión $0.6\overline{12} = \frac{6}{10} + \frac{0.\overline{12}}{10}$, tenemos

$$\frac{0.\overline{12}}{10} = \frac{4}{33} \div 10$$

de donde resulta:

$$0.\overline{12} = \frac{4}{330}$$

De acuerdo con lo anterior

$$0.6\overline{12} = \frac{6}{10} + \frac{4}{330}$$

de donde resulta:

$$0.6\overline{12} = \frac{101}{165}$$

Densidad de los números racionales

Los números racionales tienen la propiedad de ser densos, lo cual consiste en lo siguiente.

Densidad de los números racionales

Entre dos números racionales cualesquiera a y b, donde $a < b$, siempre puede encontrarse otro racional c tal que sea mayor que a pero menor que b.

Una forma de demostrar lo anterior es tomar la semisuma de a y b; es decir

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo 17

Halla un número racional entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{4}$

Solución

$$c = \frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{4}}{2} = \frac{51}{40}$$

Ejercicios 7

I. *Escribe las fracciones siguientes en forma decimal.*

1. $\frac{9}{15}$

a. 0.65
b. 0.70
c. 0.6
d. 0.58

c. 0.6

2. $\frac{3}{4}$

a. 0.6
b. 0.65
c. 0.70
d. 0.75

d. 0.75

3. $\frac{1}{5}$

a. 0.2
b. 0.25
c. 0.22
d. 0.28

a. 0.2

4. $\frac{11}{25}$

a. 0.40
b. 0.44
c. 0.48
d. 0.42

b. 0.44

5. $\frac{2}{3}$

a. 0.2
b. 0.7
c. $0.\overline{6}$
d. $0.6\overline{3}$

c. 0.6

6. $\frac{7}{20}$

a. 0.35
b. 0.45
c. 0.38
d. 0.40

a. 0.35

II. *Escribe en forma de fracción estos números decimales.*

7. 0.5

a. $\frac{2}{5}$
b. $\frac{3}{7}$
c. $\frac{5}{9}$
d. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{2}$

8. 0.4

a. $\frac{3}{8}$
b. $\frac{2}{5}$
c. $\frac{3}{7}$
d. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{5}$

9. 0.42

a. $\frac{9}{20}$
b. $\frac{21}{50}$
c. $\frac{3}{8}$
d. $\frac{23}{50}$

b. $\frac{21}{50}$

10. 0.28

a. $\frac{7}{25}$

b. $\frac{8}{25}$

c. $\frac{6}{25}$

d. $\frac{7}{24}$

a. $\frac{7}{25}$

11. 0.75

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{5}{7}$

c. $\frac{7}{9}$

d. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{3}{4}$

12. 0.125

a. $\frac{1}{7}$

b. $\frac{1}{8}$

c. $\frac{2}{9}$

d. $\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{8}$

13. $0.\overline{2}$

a. $\frac{3}{11}$

b. $\frac{2}{9}$

c. $\frac{3}{13}$

d. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{9}$

14. $0.\overline{6}$

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{7}{11}$

d. $\frac{7}{12}$

a. $\frac{2}{3}$

15. $0.\overline{7}$

a. $\frac{7}{10}$

b. $\frac{7}{11}$

c. $\frac{7}{9}$

d. $\frac{9}{12}$

c. $\frac{7}{9}$

16. $0.\overline{270}$

a. $\frac{11}{37}$

b. $\frac{3}{11}$

c. $\frac{2}{7}$

d. $\frac{10}{37}$

d. $\frac{10}{37}$

17. $0.\overline{450}$

a. $\frac{24}{53}$

b. $\frac{5}{11}$

c. $\frac{50}{111}$

d. $\frac{49}{111}$

c. $\frac{50}{111}$

18. $0.\overline{750}$

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{25}{33}$

c. $\frac{250}{333}$

d. $\frac{24}{31}$

c. $\frac{250}{333}$

Actividad grupal

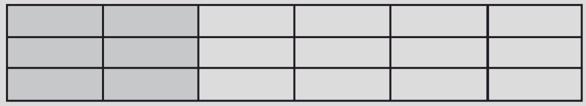
Forma equipo para realizar las actividades siguientes. Redacta un texto breve donde tus compañeros y tú expliquen cómo obtuvieron cada resultado.

1. Si el numerador y el denominador de la fracción $\frac{5}{7}$ son ambos disminuidos en 3, ¿en cuánto disminuye dicha fracción?

$\frac{3}{14}$

2. Si la unidad es el área de cada rectángulo de las figuras siguientes, expresa la superficie sombreada como una fracción.

a. 

b. 

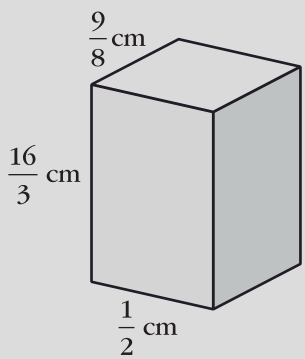
---

3. El diámetro de un círculo es $\frac{1}{4}$ del radio de otro mayor. ¿Cuántos círculos menores caben en el mayor?

64

---

4. Calcula el volumen de la figura siguiente.



3 cm^3

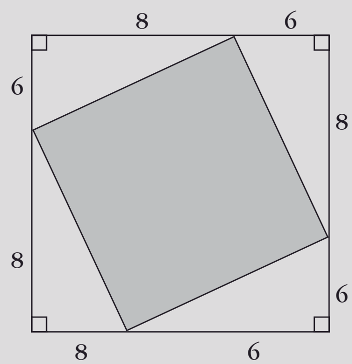
---

5. Si A es $\frac{7}{10}$ de B, B es $\frac{4}{5}$ de C y C es $\frac{1}{2}$ de D, determina $\frac{A}{D}$.

$\frac{A}{D} = \frac{7}{25}$

---

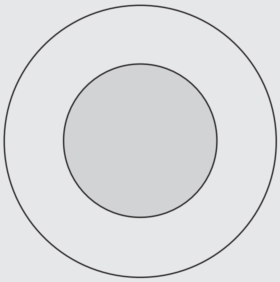
6. ¿Qué parte del área del cuadrado mayor es la superficie del cuadrado sombreado?



$\frac{25}{49}$

---

7. Si el radio del círculo mayor mide el doble que el del menor, ¿qué parte del área del círculo mayor es la superficie del círculo menor?

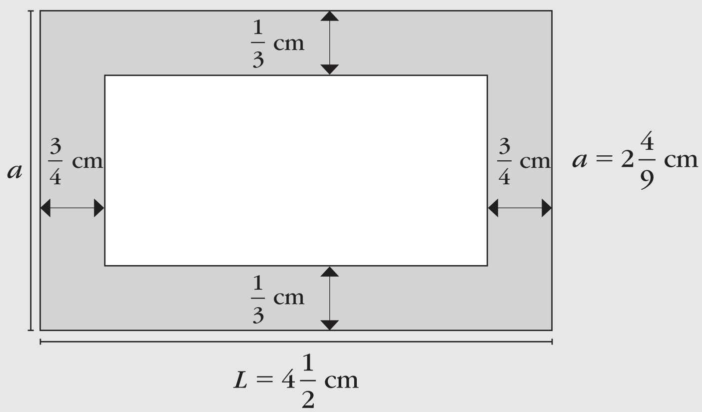


$\frac{1}{4}$

8. Un pastel se corta de forma tal que cada vez que se toma una porción, se quita una cuarta parte de lo que queda. ¿Qué fracción del pastel original queda después de haber tomado tres porciones?

$\frac{27}{64}$

9. Calcula el área de la región sombreada de la figura siguiente, donde a = ancho, L = Largo.



$5\frac{2}{3}$ cm^2

10. El triple de $\frac{1}{3}$ más la mitad de $\frac{1}{3}$ es:

$\frac{7}{6}$

Para reflexionar

En el libro *El hombre que calculaba* se incluye la historia de un padre que dejó de herencia a sus hijos 35 camellos. Su voluntad, dispuesta en su testamento, era que el hijo mayor recibiera la mitad, el segundo la tercera parte y el menor la novena parte.

Como al mayor le correspondían 17 camellos y fracción, al segundo 11 camellos y fracción, y al tercero 3 camellos y fracción, los tres hermanos discutieron, sin ponerse de acuerdo para que alguno de ellos accediese a regalar un camello a otro y poder efectuar así la repartición.

En ese momento llegó el hombre que calculaba y al enterarse de la situación les dio la solución siguiente: les prestó un camello y así al mayor le correspondieron 18 camellos, al segundo 12 y al menor 4.

Evaluación

I. *En los ejercicios 1 y 2, escribe cada número mixto como una fracción impropia. (Elige la opción correcta.)*

1. $4\frac{2}{5}$

a. $\frac{11}{5}$

b. $\frac{8}{5}$

c. $\frac{22}{5}$

d. $\frac{18}{5}$

c. $\frac{22}{5}$

2. $10\frac{5}{7}$

a. $\frac{50}{7}$

b. $\frac{22}{7}$

c. $\frac{25}{7}$

d. $\frac{75}{7}$

d. $\frac{75}{7}$

II. *Escribe la fracción impropia siguiente como número mixto. (Elige la opción correcta.)*

3. $\frac{46}{4}$

a. $12\frac{3}{2}$

b. $11\frac{1}{4}$

c. $11\frac{1}{2}$

d. $13\frac{3}{2}$

c. $11\frac{1}{2}$

III. *Simplifica la fracción siguiente. (Elige la opción correcta.)*

4. $\dfrac{280}{168}$

a. $\dfrac{4}{5}$

b. $\dfrac{5}{4}$

c. $\dfrac{5}{2}$

d. $\dfrac{2}{3}$

e. $\dfrac{5}{3}$

e. $\dfrac{5}{3}$

IV. *Realiza las operaciones y simplifica. (Elige la opción correcta.)*

5. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{5}$

a. $\dfrac{12}{5}$

b. $\dfrac{3}{5}$

c. $\dfrac{2}{5}$

d. $\dfrac{4}{5}$

e. $\dfrac{7}{5}$

d. $\dfrac{4}{5}$

---

6. $\dfrac{7}{15}\times\dfrac{10}{21}$

a. $\dfrac{1}{3}$

b. $\dfrac{5}{9}$

c. $\dfrac{2}{3}$

d. $\dfrac{4}{9}$

e. $\dfrac{2}{9}$

e. $\dfrac{2}{9}$

---

7. $\frac{7}{25} \div \frac{14}{5}$

a. $\frac{1}{10}$

b. $\frac{2}{5}$

c. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{3}{10}$

e. $\frac{4}{25}$

a. $\frac{1}{10}$

V. *Halla el número decimal que corresponda a la fracción. (Elige la opción correcta.)*

8. $\frac{25}{36}$

a. 1.44

b. 0.694

c. $0.69\overline{4}$

d. $0.5\overline{8}$

c. $0.69\overline{4}$

VI. *Halla el número fraccionario que corresponde al número decimal. (Elige la opción correcta.)*

9. 0.6

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{4}{7}$

d. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{3}{5}$

---

10. 0.45

a. $\frac{5}{9}$

b. $\frac{7}{20}$

c. $\frac{9}{20}$

d. $\frac{3}{15}$

c. $\frac{9}{20}$

---

11. $0.\overline{3}$

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{2}{7}$

c. $\frac{4}{11}$

d. $\frac{3}{11}$

a. $\frac{1}{3}$

---

12. $0.\overline{54}$

a. $\frac{4}{7}$

b. $\frac{7}{13}$

c. $\frac{6}{11}$

d. $\frac{7}{12}$

c. $\frac{6}{11}$

VII. *Resuelve los problemas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

13. Calcula el perímetro del triángulo de la figura siguiente.

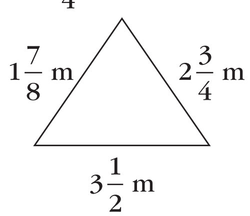
a. $8\frac{1}{2}$ m

b. $8\frac{3}{4}$ m

c. $8\frac{1}{8}$ m

d. $7\frac{7}{8}$ m

d. $7\frac{3}{4}$ m



c. $8\frac{1}{8}$ m

14. El señor López compró una camioneta en \$40 000.00 y quiere venderla a un precio del que pueda obtener $\frac{2}{5}$ de ganancia de su precio original de compra.

¿En cuánto debe vender la camioneta?

a. \$58 000.00

b. \$60 000.00

c. \$54 000.00

d. \$56 000.00

e. \$50 000.00

d. \$56 000.00

15. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{5}$ de litro se llenan con 1 800 litros de agua?

a. 3 000

b. 2 800

c. 3 200

d. 3 100

a. 3 000

16. ¿Qué cantidad corresponde a $\frac{4}{5}$ de 370?

a. 300

b. 315

c. 296

d. 290

c. 296

17. Durante una carrera, en un momento dado Roberto lleva $\frac{5}{6}$ del recorrido total y David $\frac{7}{8}$. ¿Quién va ganando?

a. Roberto

b. David

c. Van empatados

b. David

18. De una pieza de tela de 60 metros (m), un comerciante vende $60\frac{2}{5}$ m. ¿Cuántos metros de tela le quedan?

a. $19\dfrac{1}{4}$ m

b. $19\dfrac{3}{5}$ m

c. $19\dfrac{3}{10}$ m

d. $19\dfrac{1}{5}$ m

b. $19\dfrac{3}{5}$ m

6

Operaciones con polinomios

- Terminología algebraica
- Lenguaje algebraico
- Términos semejantes
- Operaciones con polinomios
- Evaluación de expresiones algebraicas

Terminología algebraica

La diferencia fundamental entre el álgebra y la aritmética es que para efectuar sus operaciones esta última utiliza números concretos, mientras que en álgebra se usan, además de números concretos, las letras del alfabeto para representar cantidades (números) conocidas o desconocidas; es decir, *los símbolos que utiliza el álgebra para representar cantidades son los números concretos y las letras del alfabeto*.

Por lo demás, las operaciones algebraicas son las mismas que las de la aritmética:

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potenciación
- Radicación

Las operaciones anteriores están sujetas a propiedades, las cuales hemos explicado en términos generales en el capítulo 3.

Por otra parte, la estructura del álgebra consta de:

- Un conjunto de símbolos que representan números complejos.
- Las operaciones algebraicas mencionadas anteriormente.
- Las propiedades de esas operaciones.

Un proceso matemático es algebraico si contiene una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, y además utiliza los números concretos y las literales del alfabeto que representan números complejos.

Expresión algebraica

Cualquier expresión que indica una o varias de las operaciones algebraicas se llama *expresión algebraica*; por ejemplo:

a. $3a + y$	*d*. $\sqrt{6x^2}$	*g*. $7x - 6$
b. $5x$	*e*. $(4y)^5$	*h*. $x^2 - 6x + 8$
c. $3y^2 - 5m$	*f*. $\frac{x+3}{x^2-9}$	*i*. $(2x - 5)(x^2 + 3)$

La expresión algebraica más sencilla es aquella en la que intervienen números o letras por medio de cualquier operación algebraica, excepto la suma y la resta; por ejemplo, $5x$, $3ab$, $5x^2$, $\frac{a}{b}\sqrt{5x}$, etcétera. Cada una de este tipo de expresiones recibe el nombre de *término algebraico*.

> *Término algebraico*
>
> Un término algebraico es una expresión compuesta por números concretos y letras que también representan números relacionados entre sí mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

Respecto a los términos algebraicos mencionados anteriormente tenemos que:

- $5x$: representa el producto del número 5 por el número literal x.
- $3ab$: representa el triple producto del número literal a por el número literal b.
- $4x^2$: representa el producto del número 4 por el cuadrado del número literal x.
- $\dfrac{a}{b}$ significa el cociente de a entre b.
- $\dfrac{a^3}{b}$ significa el cociente del cubo del número literal a entre el número literal b.
- $\sqrt{5x}$ representa la raíz cuadrada del producto de 5 por el número literal x.
- x^3y^2: representa el producto del cubo del número literal x por el cuadrado del número literal y.

Elementos de un término

Los elementos de un término son:

- El signo
- El coeficiente numérico
- La parte literal

Signo de un término

Respecto al signo, un término es negativo si le precede el signo menos ($-$) y positivo si le precede el signo más ($+$). En caso de que se omita el signo de un término, se considera que tiene signo positivo. Así, $3x$ equivale a $+3x$.

Coeficiente numérico

Si un término algebraico es el producto de un número concreto por uno o más números literales, dicho número es su coeficiente numérico; por ejemplo, los coeficientes numéricos de $7x^2$, $-4xy$, y^3, $-xy$ son 7, -4, 1 y -1, respectivamente.

Parte literal

La parte literal la constituyen las letras del término algebraico con sus respectivos exponentes. Así, en $2ab$ la parte literal es ab, en $-8x^3y$ es x^3y, en $\frac{3}{2}x^2c$ es x^2a.

Ejemplo 1

Señala el coeficiente numérico y la parte literal de cada uno de los términos siguientes:

a. $9x^3$ *b.* a^5b *c.* $-xy^2$

d. $-6mn$ *e.* $\frac{3}{5}az^2$

Solución

	Coeficiente numérico	*Parte literal*
$9x^3$	9	x^3
a^5b	1	a^5b
$-xy^2$	-1	xy^2
$-6mn$	-6	mn
$\frac{3}{5}az^2$	$\frac{3}{5}$	az^2

Grado

El grado de un término es la suma de los exponentes de sus factores literales. Así, el término $8a$ es de primer grado, $2ab$ es de segundo grado y $7xy^3$ es de cuarto grado.

Ejemplo 2

Determina el grado de los términos algebraicos siguientes.

a. $9n$ *c.* $2x^4y^3$

b. $-6x^2y$ *d.* m^2y^2

Solución

a. El grado de $9n$ es 1.

b. El grado de $-6x^2y$ es 3.

c. El grado de $2x^4y^3$ es 7.

d. El grado de m^2y^2 es 4.

Lenguaje algebraico

Frecuentemente, en la resolución de problemas matemáticos se requiere escribir una expresión algebraica que represente un enunciado verbal y viceversa. En el cuadro 1 se muestran algunos ejemplos

Cuadro 1. Enunciados verbales y su expresión algebraica correspondiente.

Enunciado verbal	*Expresión algebraica*
• El doble de un número	$2x$, $2y$, $2w$, etcétera
• La diferencia de dos números	$a - b$, $x - y$, $w - m$, etcétera
• La raíz cuadrada de un número	$\sqrt{x}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{y}$
• El triple del cubo de un número	$3x^3$, $3a^3$, $3n^3$, etcétera
• El producto de dos números	ab, xy, mn, etcétera
• El cociente de dos números	$\frac{x}{y}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, etcétera
• La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}y$, etcétera
• El doble de un número disminuido en 5	$2x - 5$, $2a - 5$, $2m - 5$, etcétera

Asimismo, en el cuadro 2 se presentan algunos ejemplos en los que se traduce una expresión algebraica en un enunciado verbal que la represente.

Cuadro 2. Expresiones algebraicas y su enunciado verbal correspondiente.

Expresión algebraica	*Enunciado verbal*
$3x$	• El triple de un número
ab^2	• El producto de un número por el cuadrado de otro
$m + n$	• La suma de dos números
$a - b$	• La diferencia de dos números
$x^3 + y^3$	• La suma de los cubos de dos números, respectivamente
$3(x + y)$	• El triple de la suma de dos números
$\frac{1}{3}x^2$	• Un tercio del cuadrado de un número

Ejercicios 1

I. *En cada uno de los términos algebraicos siguientes determina el coeficiente numérico, la parte literal, los exponentes de la parte literal y el grado del término.*

Término algebraico	*Coeficiente numérico*	*Parte literal*	*Exponentes de la parte literal*	*Grado*
1. $4x^3$				
2. $-5xy^2$				
3. $6a^2b^3c$				
4. $\frac{-3}{5}p^2 8^5$				

II. *Escribe una expresión algebraica que representa cada uno de los enunciados siguientes.*

5. El doble de un número

6. El doble de un número aumentado en 7

7. La diferencia de dos números

8. La diferencia de dos cuadrados

9. La mitad del cuadrado de un número

10. La cuarta parte del cubo de un número

11. Un número disminuido en 6

12. El triple de un número aumentado en 12

13. El doble del cuadrado de un número disminuido en 5

14. El cociente de dos números

15. Cinco veces el cubo de un número aumentado en 4

16. La raíz cúbica de un número

17. La raíz cuadrada del producto de tres números

18. El doble de la diferencia de dos números

19. Cuatro veces la diferencia de dos cuadrados

20. Tres veces la diferencia de dos cubos

21. El producto del cuadrado de un número por la suma de otros dos

22. El producto del cubo de un número por la diferencia de otros dos

23. El cubo de la mitad de un número

24. El cuadrado de la tercera parte de un número

Términos semejantes

Los términos semejantes son los que tienen la misma parte literal; es decir, tienen las mismas letras afectadas de iguales exponentes. Los siguientes son algunos ejemplos de términos semejantes:

- $3n^2$ y $\frac{5}{4}n^2$
- $6x^2yz^4$ y $-8x^2yz^4$

Los términos $6nm^3$ y $8n^2m$ no son semejantes porque si bien tienen las mismas literales, éstas no tienen los mismos exponentes: la n del primero tiene exponente 1 y la del segundo tiene exponente 2. Asimismo, los términos ab^5 y mn^5 tampoco son semejantes porque aunque tienen los mismos exponentes, las literales no son las mismas.

Reducción de términos semejantes

Frecuentemente, en la resolución de problemas algebraicos se requiere reducir términos semejantes. Esta operación consiste en sustituir dos o más términos semejantes por uno solo, que resulta de la suma algebraica de sus coeficientes numéricos multiplicados por su parte literal.

Para realizar la reducción de términos semejantes se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación. Por ejemplo,

$$5a + 7a = a(5 + 7) = a(12) = 12a$$
$$6x^2 - x^2 = x^2(6 - 1) = x^2(5) = 5x^2$$
$$3b - 10b = b(3 - 10) = b(-7) = -7b$$

Cuando se realiza la reducción de términos semejantes pueden presentarse cualquiera de los tres casos siguientes.

1. Reducción de términos semejantes que tienen el mismo signo.

En este caso se suman los coeficientes numéricos, anteponiendo a la suma el signo común que tienen los términos y a continuación se escribe la parte literal. Por ejemplo

$$7a + 2a = 9a$$
$$-8n - 4n = -12n$$
$$-6x^2 - 8x^2 = -14x^2$$
$$\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^3 = \tfrac{3}{4}x^3$$

2. Reducción de términos semejantes que tienen diferente signo.

En este caso se restan los coeficientes numéricos, poniendo delante de la diferencia obtenida el signo del número que tiene mayor valor absoluto y a continuación se escribe la parte literal. Por ejemplo

$$10m^2 - 7m^2 = 3m^2$$
$$5x^2 - 12x^2 = -7x^2$$
$$-15xy + 18xy = 3xy$$
$$-12ab^2 + 8ab^2 = -4ab^2$$
$$9x^2y - 9x^2y = 0$$
$$-7z + 7z = 0$$

3. Reducción de tres o más términos semejantes que no tienen todos el mismo signo.

En este caso se siguen estos pasos:

a. Se reducen a un solo término todos los que tienen signo positivo.
b. Se reducen a un solo término todos los que tienen signo negativo.
c. Se aplica el método expuesto en el caso 2.

Ejemplo 3

Reduce

$$-8a + 3a - 6a + a$$

Solución

Primero reduzcamos los términos positivos

$$3a + a = 4a$$

A continuación reduzcamos los negativos:

$$-8a - 6a = -14a$$

De acuerdo con los términos obtenidos queda

$$4a - 14a = -(14 - 4)a = -10a$$

Ejercicios 2

I. *Reduce los términos semejantes*

1. $4a + 6a =$	**2.** $x^2y + 9x^2y =$	**3.** $4ab^2 + 7ab^2 + ab^2 =$	**4.** $6a^3b + 7a^3b =$

5. $-x - x =$	10. $\frac{2}{5}n + \frac{1}{10}n =$	15. $-\frac{5}{9}b - \frac{7}{9}b =$	20. $-4x^2 + 11x^2 =$
6. $-3a - 2a =$	11. $\frac{2}{3}y + \frac{3}{8}y =$	16. $-\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{6}a^3 =$	21. $-10xy^3 + 8xy^3 - 12xy^3 + 6xy^3 =$
7. $-8a - 9a =$	12. $\frac{3}{4}b + \frac{2}{5}b =$	17. $20y^3 - 18y^3 =$	22. $-x^2 - x^2 - x^2 =$
8. $-6a - a =$	13. $-\frac{5}{9}x - \frac{1}{3}x =$	18. $6n^2 - 20n^2 =$	23. $-9a^2b + 9a^2b =$
9. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x =$	14. $-\frac{15}{7}a - \frac{6}{7}a =$	19. $-8ab^2 + ab^2 =$	24. $8x^2y - 3xy^2$

Operaciones con polinomios

Un polinomio es cualquier expresión algebraica constituida por un conjunto finito de términos, en cada uno de los cuales aparecen números y letras relacionadas sólo mediante productos y potencias de exponentes que son números naturales. Algunos ejemplos de polinomios son

$$x^2 - 7x + 6$$
$$3x^2y - 5ab^6 + 7n^4$$
$$6ab^2 - 15ab^4 - 6ab^5$$

En cambio, las expresiones

$$7a - x^{1/2} \quad \text{y} \quad 16x^{-3} + 4$$

no son polinomios porque contienen exponentes que no son números naturales.

Clasificación de los polinomios

De acuerdo con el número de términos que tienen, los polinomios se clasifican como sigue.

Monomio. Es un polinomio que consta de un solo término, como

$$6m^3$$

Binomio. Es un polinomio que consta de dos términos, como

$$a - 7b$$

Trinomio. Es un polinomio que consta de tres términos, como

$$7x^2 - 5x + 6$$

Si consta de cuatro términos, se dice que es un polinomio de cuatro términos, etcétera.

Suma de polinomios

Para sumar dos o más polinomios se requiere reducir términos semejantes de los polinomios que se suman. Para ello pueden escribirse los polinomios en renglones sucesivos de forma que los términos semejantes queden en una misma columna y a continuación se reducen términos semejantes.

Es importante que los polinomios que se suman se ordenen todos respecto a una misma letra, ya sea en forma descendente o ascendente; es decir, que los exponentes de una letra escogida vayan aumentando o disminuyendo de uno en uno.

Ejemplo 4

Suma los polinomios indicados:

a. $4x^3 - 8 + 6x^2 - x^4 - 9x$; $2x - 4x^2 - 5 + x^3 - x^4$; $-5x^3 - 2x^4 + 19 + 3x - x^2$

Solución

Si ordenamos los polinomios en forma descendente respecto a x y los colocamos en renglones queda

$$-x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 9x - 8$$
$$-x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 5$$
$$-2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 19$$

de donde al reducir términos semejantes resulta:

$$-4x^4 + x^2 - 4x + 6$$

b. $2x^2 - 5xy + y^2 - 7$; $-3y^2 - x^2 - 7xy - 1$; $5x^2 - xy + 6$

Solución

Ordenemos los polinomios respecto a x, coloquémoslos en renglones y reduzcamos términos semejantes

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5xy + y^2 - 7 \\ -x^2 - 7xy - 3y^2 - 1 \\ 5x^2 - xy + 6 \\ \hline 6x^2 - 13xy - 2y^2 - 2 \end{array}$$

Ejercicios 3

I. *Efectúa las siguientes sumas de polinomios. (Elige la opción correcta.)*

1. $3x^2 - 6x + 4$; $x^2 - 2x - 1$

a. $4x^2 + 8x + 3$
b. $4x^2 - 8x - 3$
c. $4x^2 - 8x + 3$
d. $4x^2 - 8x - 4$

c. $4x^2 - 8x + 3$

2. $3a + 7b - 5c - 1$; $a - 10b + 5c - 1$

a. $4a - 3b$

b. $4a - 3b + 2$

c. $4a + 3b + 10c$

d. $4a - 3b - 2$

d. $4a - 3b - 2$

6. $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5 + 8x$; $-4x - 1 - 7x^2 - x^3 - 2x^4$

a. $-x^4 + 3x^3$

b. $-x^4 - 2x^3 + 4x - 6$

c. $x^4 + 3x^3 + 4x - 6$

d. $-x^4 - 3x^3 + 4x - 6$

d. $-x^4 - 3x^3 + 4x - 6$

3. $5x - 4y + 10$; $-7x - 3y - 10$

a. $2x + 7y$

b. $-2x - 7y$

c. $-2x - 7y - 20$

d. $-2x - 7y + 20$

b. $-2x - 7y$

7. $4xy - 3y + z$; $4z - 9xy$; $5xy - 6z + 10y$

a. $7y - z$

b. $7y + z$

c. $7y - z + 18xy$

d. $7y + 2z$

a. $7y - z$

4. $2x^3 - 9x^2 - 10x + 3$; $x^3 + 3x^2 - x - 8$

a. $3x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

b. $3x^3 - 6x^2 - 10x - 5$

c. $3x^3 + 6x^2 + 11x - 5$

d. $3x^3 + 6x^2 - 11x - 5$

a. $3x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

8. $-m^2 + 16mn - 8m - 9n + 5$; $-4mn - 5 + n - m + m^2$

a. $12mn + 9m - 8n - 10$

b. $12mn - 9m + 8n$

c. $12mn - 9m - 8n$

d. $12mn - 9m + 8n$

c. $12mn - 9m - 8n$

5. $15ab + 6b - 8a - c + 3$; $-12 + 4a + ab - 6b - c$

a. $16ab - 4a - 9$

b. $16ab - 4a - 2c - 9$

c. $16ab - 4a - 12b$

d. $16ab - 4a - 2c + 9$

b. $16ab - 4a - 2c - 9$

9. $7xy - 2x + y - 8$; $xy + 2x - 2$; $-5y - 9xy + 6$

a. $-2xy - 5y - 4$

b. $-xy - 4y - 4$

c. $xy + 4y - 4$

d. $xy + 4y + 4$

b. $-xy - 4y - 4$

10. $-4a - 12b + c$; $3a + 9c - b$; $-5c + 3b + 2a$

a. $a + 12b + 4c$

b. $a - 10b + 4c$

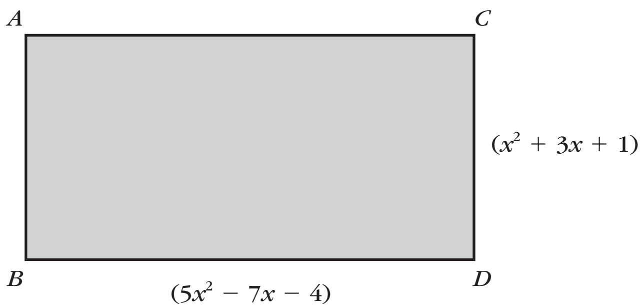
c. $a - 10b + 5c$

d. $a + 10b + 5c$

c. $a - 10b + 5c$

II. *Determina la expresión polinomial que represente el perímetro de las figuras geométricas siguientes.*

11. El cuadrilátero *ABCD* es un rectángulo.



a. $12x^2 - 8x - 6$

b. $6x^2 - 4x - 3$

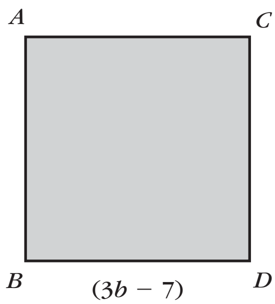
c. $12x^2 + 8x + 6$

d. $12x^2 - 10x - 8$

a. $12x^2 - 8x - 6$

---

12. *ABCD* es un cuadrado.



a. $12b + 28$

b. $12b - 7$

c. $12b - 28$

d. $12b + 7$

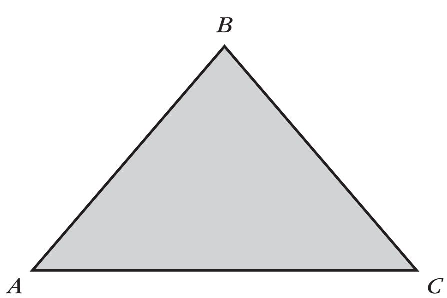
c. $12b - 28$

---

13. $\overline{AB} = 5x - 3y - 4z + 3$

$\overline{BC} = 2x + y - z - 4$

$\overline{AC} = 4x - y - z - 4$



a. $11x - 3y - 6z + 5$

b. $11x - 3y + 6z - 5$

c. $11x - 3y + 6z + 5$

d. $11x - 3y - 6z - 5$

d. $11x - 3y - 6z - 5$

Resta de polinomios

Como analizamos en el capítulo 1, toda resta puede expresarse como una suma aplicando la regla siguiente:

$$x - y = x + (-y)$$

En otras palabras, para restar dos polinomios se suma el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

Se acostumbra escribir en un renglón los términos del minuendo y por debajo de éste los que corresponden al inverso aditivo del sustraendo, de forma que los términos semejantes estén colocados en una misma columna; por último, se procede a reducir términos semejantes.

Ejemplo 5

Resta el polinomio $-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2$ de $10x^2 - 6x^4 + x - 10 - x^3$.

Solución

De acuerdo con la orden tenemos

$$(10x^2 - 6x^4 + x - 10 - x^3) \quad \text{y} \quad (-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2)$$

Ordenamos los polinomios respecto a x en forma descendente y aplicamos la regla de la resta. Así, tenemos:

$$\begin{array}{r} -6x^4 - x^3 + 10x^2 + x - 10 \\ +10x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 7x + 4 \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 8x - 6 \end{array}$$

Ejercicios 4

I. *En los ejercicios siguientes resta el segundo polinomio del primero. (Elige la opción correcta.)*

1. $6x^2 + 3y^2 - 7x + 4y - 2;\ 2x^2 - y^2 - 7x + 8$

a. $8x^2 + 2y^2 - 14x + 6$

b. $4x^2 + 4y^2 + 4y - 10$

c. $4x^2 + 3y^2 - 10$

d. $4x^2 - 4y^2 + 4y - 10$

b. $4x^2 + 4y^2 + 4y - 10$

2. $a^3 - 6b^2 - c^3;\ 3c^3 + 6b^2 - 2a^3$

a. $3a^3 - 12b^2 - 4c^3$

b. $-a^3 + 2c^2$

c. $3a^3 + 12b^2 - 4c^3$

d. $3a^3 - 12b^2 - 3c^3$

a. $3a^3 - 12b^2 - 4c^3$

3. $x^2 - 3x + y + 6;\quad -12 - 6y + 2x + 2x^2$

a. $-x^2 - 5x + 7y + 18$

b. $-x^2 + 5x + 7y + 18$

c. $x^2 - 5x + 7y + 18$

d. $x^2 + 5x - 7y - 18$

a. $-x^2 - 5x + 7y + 18$

4. $\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}y;\ -\frac{7}{8}x - \frac{3}{8}y$

a. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}y$

b. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$

c. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y$

d. $\frac{41}{8}x + \frac{1}{8}y$

a. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}y$

5. $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b;\quad \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b$

a. $\frac{1}{6}a + \frac{11}{12}b$

b. $\frac{1}{3}a + \frac{7}{12}b$

c. $\frac{1}{6}a - \frac{11}{12}b$

d. $\frac{1}{6}a + \frac{5}{12}b$

a. $\frac{1}{6}a + \frac{11}{12}b$

7. $-7c + 4b + 3a - 4;\ 2b + 5a + 4 - 7c$

a. $-2a - 2b - 8$

b. $2a - 2b + 8$

c. $-2a + 2b$

d. $-2a + 2b - 8$

d. $-2a + 2b - 8$

6. $3x - 4xy + 6y - 8;\ -10 - y + 7x + 2xy$

a. $-4x + 6xy + 5y - 2$

b. $-4x - 6xy + 5y - 2$

c. $-4x - 6xy + 7y + 2$

d. $4x - 6xy + 7y - 2$

c. $-4x - 6xy + 7y + 2$

8. $x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - 4y^3;\ 2y^3 - 4xy^2 + 2x^3 - 7x^2y$

a. $x^3 - 10x^2y + xy^2 + 6y^3$

b. $-x^3 + 10x^2y - xy^2 - 6y^3$

c. $-x^3 - 4x^2y - 9xy^2 - 2y^3$

d. $-x^3 + 10x^2y + xy^2 + 6y^3$

b. $-x^3 + 10x^2y - xy^2 - 6y^3$

II. *En el ejercicio siguiente resta el tercer polinomio de la suma de los primeros dos:* $(A + B) - C$.

9. $A = 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6;\ B = -x^3 + x^2 - 7x + 1;\ C = 8x^2 + 3x + 3x^3 - 1$

a. $-3x^2 - 13x + 6$

b. $-3x^2 - 15x + 8$

c. $6x^3 - 13x + 6$

d. $6x^3 - 3x^2 - 15x + 8$

b. $-3x^2 - 15x + 8$

Multiplicación de polinomios

Respecto a esta operación y en relación con los polinomios distinguiremos tres casos:

1. Multiplicación de monomios.
2. Multiplicación de un monomio por un polinomio.
3. Multiplicación de un polinomio por un polinomio.

Multiplicación de monomios

En la multiplicación de dos o más monomios se aplican las reglas de los signos, las leyes de los exponentes y los axiomas de la multiplicación.

Para multiplicar dos o más monomios podemos seguir estos pasos:

1. Se determina el signo del producto.
2. Se multiplican los coeficientes numéricos.
3. Se multiplican las partes literales aplicando las leyes de los exponentes respectivas.

Ejemplo 6

Multiplica los monomios siguientes.

a. $(3x^2y)(7xy^4)$

Solución

Puesto que los dos monomios son positivos, el producto tendrá el mismo signo

$$(3x^2y)(7xy^4) = (3)(7)\,x^{2+1}y^{1+4} = 21x^3y^5$$

b. $(-6m^2n^4y)(-2mn^2y^4)$

Solución

Como los dos monomios son negativos, el producto será positivo

$$(-6m^2n^4y)(-2mn^2y^4) = (-6)(-2)m^{2+1}n^{4+2}y^{1+4} = 12m^3n^6y^5$$

c. $(-4w^2v)^2$

Solución

$$(-4)^2w^{(2)(2)}v^{(1)2} = (-4)^2w^4v^2 = 16w^4v^2$$

d. $(-2a^3b^2c^5)^3 =$

Solución

$$(-2a^3b^2c^5)^3 = (-2)^3a^9b^6c^{15} = -8a^9b^6c^{15}$$

Ejercicios 5

I. *Efectúa las multiplicaciones siguientes.*

1. $6a^3b(2ab^5)$
2. $(-8xy^2)(3xy)$
3. $(-4m^2b)(-5m^3b)$
4. $(-7x)(-2x)(-3x^4)$
5. $(4a^2b)(-5ab^3)(-2a^2b^4c)$
6. $3x^3y^2(2x^4y^3)(-4xy)$

7. $(-2m^2n^3)^4(3mn^4)^2$

8. $(-2x^2yz^3)^3(-2x^3y)^2$

9. $(-3x^2y^3)^3(-2xy^3)^2$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para efectuar esta operación se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación que, como recordarás, postula lo siguiente:

$$a(b + c + d \ldots + k) = ab + ac + ad \ldots + ak$$

En el ejemplo siguiente se muestra cómo aplicar esta propiedad al multiplicar un monomio por un polinomio.

Ejemplo 7

Efectúa las multiplicaciones siguientes.

a. $3x^2(2x^3 - 7x^2 - x + 6)$

Solución

$$\begin{aligned} 3x^2(2x^3 - 7x^2 - x + 6) &= (3x^2)(2x^3) + 3x^2(-7x^2) + 3x^2(-x) + 3x^2(6) \\ &= 6x^5 - 21x^4 - 3x^3 + 18x^2 \end{aligned}$$

b. $-3a^2b(5a^3 - b^2 + 4)$

Solución

$$\begin{aligned} -3a^2b(5a^3 - b^2 + 4) &= -3a^2b(5a^3) - 3a^2b(-b^2) - 3a^2b(4) \\ &= -15a^5b + 3a^2b^3 - 12a^2b \end{aligned}$$

c. $8\left[\frac{x-5}{2} + \frac{x+3}{4} - \frac{x+1}{8}\right]$

Solución

$$\begin{aligned} 8\left[\frac{x-5}{2} + \frac{x+3}{4} - \frac{x+1}{8}\right] &= 8\left(\frac{x-5}{2}\right) + 8\left(\frac{x+3}{4}\right) - 8\left(\frac{x+1}{8}\right) \\ &= 4(x-5) + 2(x+3) - (x+1) \\ &= 4x - 20 + 2x + 6 - x - 1 \\ &= 5x - 15 \end{aligned}$$

Ejercicios 6

I. *Efectúa las multiplicaciones que se indican.*

1. $4y^2(y^3 - 5y^2 + y - 1) =$

2. $mn^4(m^3 - 2m^2n + 4mn^2 - n^2 + 4) =$

3. $-2a^3b(a^3 - 2a^2b^2 - 6ab^3) =$

4. $7x^2(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5) =$

5. $-5xy^3(2x^3 - x^2y - 6)$

6. $-y^3(4y^2 - 5y + 6)$

7. $xy^4(xy - x^2y^2)$

8. $4a^2(5a^2 - 3a - b)$

9. $12\left[\frac{2x-1}{4} - \frac{x-3}{3}\right]$

10. $16\left[\frac{x-5}{8} - \frac{x+6}{2}\right]$

Multiplicación de un polinomio por un polinomio

Consideremos los polinomios

$$(a + b) \quad \text{y} \quad (x + y + z)$$

Para multiplicarlos, hagamos $w = a + b$; luego

$$(a + b)(x + y + z) = w(x + y + z)$$

Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación resulta:

$$w(x + y + z) = wx + wy + wz$$

o sea

$$\begin{aligned} &= (a + b)x + (a + b)y + (a + b)z \\ &= ax + bx + ay + by + az + bz \\ &= ax + ay + az + bx + by + bz \end{aligned}$$

Observa que cada término del primer polinomio se ha multiplicado por cada uno de los términos del segundo polinomio. Obviamente, de acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación, también se puede proceder multiplicando cada término del segundo polinomio por los términos del primero.

Ejemplo 8

Multiplica los polinomios siguientes:

$$(7x - 5)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3)$$

Solución

$$\begin{aligned} (7x - 5)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) &= 7x(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) - 5(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) \\ &= 28x^4 - 35x^3 - 14x^2 + 21x - 20x^3 + 25x^2 + 10x - 15 \\ &= 28x^4 - 55x^3 + 11x^2 + 31x - 15 \end{aligned}$$

Si bien la multiplicación de polinomios puede hacerse como en el ejemplo anterior, al multiplicar dos polinomios se acostumbra escribirlos en dos renglones (uno debajo del otro) y multiplicar cada uno de los términos del polinomio que se encuentra en el renglón inferior por el que se halla en el renglón superior. Es importante ordenar los términos semejantes que resultan del producto en una misma columna para así facilitar la operación de reducir términos semejantes.

Ejemplo 9

Realiza la multiplicación siguiente

$$(2x - 5)(4x^3 - 7x^2 + 2x - 3)$$

Solución

Se acomodan los polinomios en dos renglones y se hace la operación

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^3 & -7x^2 & +2x & -3 & \\ & & 2x & -5 & \\ \hline 8x^4 \; -14x^3 & +4x^2 & -6x & & \\ -20x^3 & +35x^2 & -10x & +15 & \\ \hline 8x^4 \; -34x^3 & +39x^2 & -16x & +15 & \end{array}$$

Ejercicios 7

I. *Efectúa las multiplicaciones siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $(x^2 - 3x + 4)(2x - 5)$

a. $2x^3 - 13x^2 + 20x - 20$
b. $2x^3 - 11x^2 + 23x - 20$
c. $2x^3 + 11x^2 + 23x + 20$
d. $2x^3 - 11x^2 + 23x + 20$

b. $2x^3 - 11x^2 + 23x - 20$

2. $(4x - 1)(9x - 2)$

a. $36x^2 + 17x + 2$
b. $36x^2 - 17x + 2$
c. $36x^2 - 17x - 2$
d. $36x^2 - 19x + 2$

b. $36x^2 - 17x + 2$

3. $(3x - 1)(2x^2 - 7x - 4)$

a. $6x^3 - 23x^2 + 5x + 4$
b. $6x^3 + 23x^2 - 5x + 4$
c. $6x^3 - 23x^2 - 5x - 4$
d. $6x^3 - 23x^2 - 5x + 4$

d. $6x^3 - 23x^2 - 5x + 4$

4. $(5x - 2)(6x^2 - 3x + 1)$

a. $30x^3 - 27x^2 + 11x - 2$
b. $30x^3 - 3x^2 + 11x - 2$
c. $30x^3 + 27x^2 + 11x + 2$
d. $30x^3 - 27x^2 + 11x + 2$

a. $30x^3 - 27x^2 + 11x - 2$

5. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

a. $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 - b^3$
b. $a^3 - b^3$
c. $a^3 - 2a^2b - 2ab^2 - b^3$
d. $a^3 + b^3$

b. $a^3 - b^3$

6. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

a. $x^3 - 6x^2 - 18x - 27$
b. $x^3 - 6x^2 - 18x + 27$
c. $x^3 + 27$
d. $x^3 - 27$

c. $x^3 + 27$

7. $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

a. $8a^3 - b^3$
b. $8a^3 + 8a^2b + 4ab^2 - b^3$
c. $8a^3 - 8a^2b - 4ab^2 + b^3$
d. $8a^3 + b^3$

a. $8a^3 - b^3$

8. $(a + b)(a - b)$

a. $a^2 - 2ab + b^2$
b. $a^2 + b^2$
c. $a^2 - b^2$
d. $a^2 + 2ab + b^2$

c. $a^2 - b^2$

9. $(4x - 5y)(4x + 5y)$

a. $16x^2 - 25y^2$

b. $16x^2 + 25y^2$

c. $16x^2 - 40xy + 25y^2$

d. $16x^2 - 20xy - 25y^2$

a. $16x^2 - 25y^2$

10. $(x + 9)(x - 2)$

a. $x^2 - 7x + 18$

b. $x^2 + 7x + 18$

c. $x^2 + 7x - 7$

d. $x^2 + 7x - 18$

II. *Resuelve los problemas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

11. Calcula la expresión polinomial del área del rectángulo siguiente.

$(4x - 2)$

$(3x^2 - 5x + 6)$

a. $12x^3 - 28x^2 + 30x - 12$

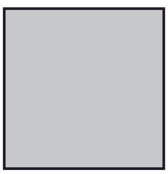
b. $12x^3 - 26x^2 + 34x - 12$

c. $12x^3 - 26x^2 + 30x - 12$

d. $12x^3 + 26x^2 + 34x - 12$

b. $12x^3 - 26x^2 + 34x - 12$

12. Determina el área del cuadrado de la figura siguiente.



$(5x - 6)$

a. $25x^2 + 60x - 36$

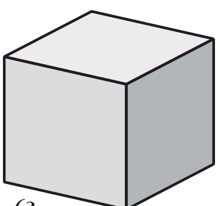
b. $25x^2 - 60x - 36$

c. $25x^2 - 60x + 36$

d. $25x^2 - 30x + 36$

d. $25x^2 - 30x + 36$

13. Determina el volumen del cubo siguiente.



$(3x - 2)$

a. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

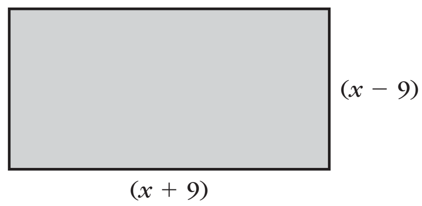
b. $27x^3 + 54x^2 + 24x + 8$

c. $27x^3 - 54x^2 + 36x + 8$

d. $27x^3 - 54x^2 + 24x - 8$

a. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

14. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo siguiente.



a. $x^2 - 18x + 81$

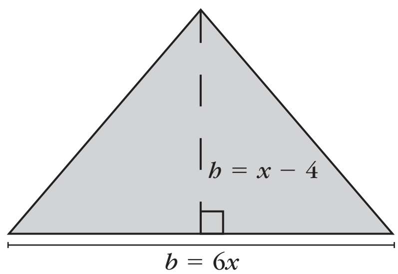
b. $x^2 + 81$

c. $x^2 - 18x - 81$

d. $x^2 - 81$

d. $x^2 - 81$

15. Determina la expresión polinomial del área del triángulo siguiente.



a. $3x^2 + 12x$

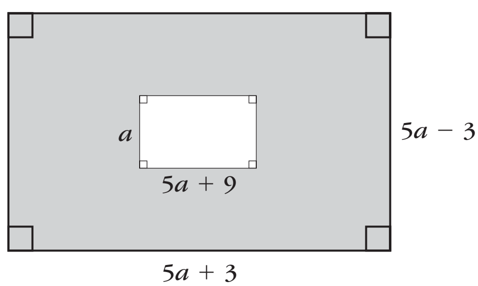
b. $6x^2 - 24x$

c. $6x^2 + 24x$

d. $3x^2 - 12x$

d. $3x^2 - 12x$

16. Determina una expresión para el área de la región sombreada de la figura siguiente.



a. $20a^2 - 9a - 9$

b. $20a^2 + 9a - 9$

c. $30a^2 - 9a - 9$

d. $20a^2 - 18a$

a. $20a^2 - 9a - 9$

Productos notables

Al multiplicar algunos tipos de expresiones algebraicas se obtienen productos en los que se distinguen algunos rasgos notables, los cuales nos permiten efectuar dichas operaciones en forma rápida al aplicar la regla correspondiente. Tales productos reciben el nombre de *productos notables*. A continuación veremos algunos casos.

Producto de dos binomios conjugados

Si se tiene el binomio $x + y$, entonces $x - y$ es su conjugado, y viceversa.

Para multiplicar dos binomios conjugados se aplica la regla siguiente.

Multiplicación de dos binomios conjugados

El producto de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

Consideraremos como primer término el que tiene signo positivo en ambos binomios, de manera que

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

Comprobación

Multipliquemos $(x + y)(x - y)$:

$$\begin{array}{l} x + y \\ \underline{x - y} \\ x^2 + \cancel{xy} \\ \quad\ \underline{-\cancel{xy} - y^2} \\ \quad x^2 - y^2 \end{array}$$

Ejemplo 10

Halla los productos de los binomios conjugados siguientes.

a. $(y - 6)(y + 6)$

b. $(4x - 3)(4x + 3)$

c. $(w^2 - 5)(w^2 + 5)$

Solución

a. $(y - 6)(y + 6) = y^2 - 36$

b. $(4x - 3)(4x + 3) = (4x)^2 - (3)^2$
$= 16x^2 - 9$

c. $(w^2 - 5)(w^2 + 5) = (w^2)^2 - (5)^2$
$= w^6 - 25$

Cuadrado de un binomio

En este caso se tiene lo siguiente.

Cuadrado de un binomio

El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término, es decir

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Comprobación

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x + y)(x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x + y \\ \hline x^2 + xy \quad\quad \\ +xy + y^2 \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 \end{array}$$

Veamos el caso particular en que el número literal y tenga signo negativo.

$$(x - y)^2 = x^2 + 2(x)(-y) + (-y)^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo 11

Halla los productos siguientes

a. $(n + 6)^2$

b. $(y - 4)^2$

c. $(3y + 2x)^2$

d. $(8a - 3b)^2$

Solución

a. $(n + 6)^2 = (n)^2 + 2(n)(6) + (6)^2$
$= n^2 + 12n + 36$

b. $(y - 4)^2 = (y)^2 + 2(y)(-4) + (-4)^2$
$= y^2 - 8y + 16$

c. $(3y + 2x)^2 = (3y)^2 + 2(3y)(2x) + (2x)^2$
$= 9y^2 + 12xy + 4x^2$

d. $(8a - 3b)^2 = (8a)^2 + 2(8a)(-3b) + (-3b)^2$
$= 64a^2 - 48ab + 9b^2$

El producto de dos binomios que tienen un término común

En este producto notable se tiene lo siguiente:

Producto de dos binomios que tienen un término común

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes, es decir

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Comprobación

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$

Así

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Ejemplo 12

Halla los productos siguientes

a. $(x + 9)(x + 3)$

b. $(y + 7)(y - 3)$

c. $(a + 2)(a - 9)$

d. $(b - 6)(b - 4)$

e. $(3a + 7)(3a + 2)$

Solución

$$a.\ (x + 9)(x + 3) = x^2 + x(9 + 3) + 9(3)$$
$$= x^2 + 12x + 27$$

$$b.\ (y + 7)(y - 3) = y^2 + y[7 + (-3)] + 7\ (-3)$$
$$= y^2 + y(7 - 3) - 21$$
$$= y^2 + 4y - 21$$

$$c.\ (a + 2)(a - 9) = a^2 + a(2 - 9) + 2(-9)$$
$$= a^2 + a(-7) - 18$$
$$= a^2 - 7a - 18$$

$$d.\ (b - 6)(b - 4) = b^2 + b[-6 + (-4)] + (-6)(-4)$$
$$= b^2 + b(-6 - 4) + 24$$
$$= b^2 - 10b + 24$$

$$e.\ (3a + 7)(3a + 2) = (3a)^2 + 3a(7 + 2) + 7(2)$$
$$= 9a^2 + 3a(9) + 14$$
$$= 9a^2 + 27a + 14$$

Cubo de un binomio

En este producto notable se tiene lo siguiente.

Cubo de un binomio

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, es decir

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Comprobación

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

esto es

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Veamos el caso en el que el número literal y tenga signo negativo.

$$(x - y)^3 = (x - y)(x - y)^2$$
$$= (x - y)(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 - 2xy + y^2) - y(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3$$

Por tanto

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Halla los productos notables (cubo de un binomio) siguientes

Ejemplo 13

a. $(y + 4)^3$
b. $(3n + 5)^3$
c. $(4n - 1)^3$
d. $(5b - 3)^3$

Solución

a. $(y + 4)^3 = (y)^3 + 3(y)^2(4) + 3(y)(4)^2 + (4)^3$
$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

b. $(3n + 5)^3 = (3n)^3 + 3(3n)^2(5) + 3(3n)(5)^2 + (5)^3$
$= 27n^3 + 135n^2 + 225n + 125$

c. $(4n - 1)^3 = (4n)^3 + 3(4n)^2(-1) + 3(4n)(-1)^2 + (-1)^3$
$= 64n^3 - 48n^2 + 12n - 1$

d. $(5b - 3)^3 = (5b)^3 + 3(5b)^2(-3) + 3(5b)(-3)^2 + (-3)^3$
$= 125b^3 - 225b^2 + 135b - 27$

Ejercicios 8

I. *Realiza las multiplicaciones siguientes utilizando la regla del producto notable correspondiente.*

1. $(a - 5)(a + 5)$

2. $(2b + 7)(2b - 7)$

3. $(3x + 5)(3x - 5)$

4. $(7w - 2a)(7w + 2a)$

5. $(y + 8)(y - 8)$

6. $(1 - a)(1 + a)$

7. $(a + 6)^2$

8. $(n - 5)^2$

9. $(3a + b)^2$

10. $(5a - 2b)^2$

11. $(1 - a)^2$

12. $(7x + 2y)^2$

13. $(x + 8)(x + 3)$

14. $(y + 9)(y - 3)$

15. $(a - 9)(a + 5)$

16. $(b - 1)(b - 7)$

17. $(n + 2)^3$

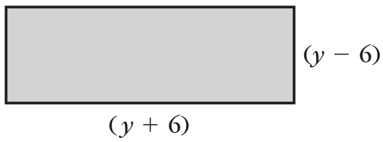
18. $(y - 3)^3$

19. $(2x + 3)^3$

20. $(3x - 5)^3$

II. *En los ejercicios siguientes, utiliza la regla de los productos notables correspondientes. (Elige la opción correcta.)*

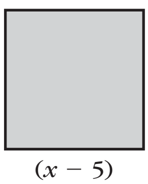
21. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo de la figura siguiente.



a. $y^2 - 12y + 36$
b. $y^2 - 12y - 36$
c. $y^2 + 36$
d. $y^2 - 36$

d. $y^2 - 36$

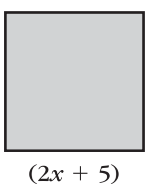
22. Determina la expresión polinomial del área del cuadrado de la figura siguiente.



a. $x^2 - 25$
b. $x^2 + 10x + 10$
c. $x^2 - 10x - 25$
d. $x^2 - 10x + 25$

a. $x^2 - 25$

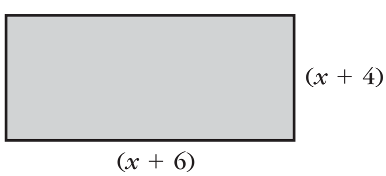
23. Determina la expresión polinomial del área del cuadrado de la figura siguiente.



a. $4x^2 + 20x + 25$
b. $4x^2 + 10x + 25$
c. $2x^2 + 20x + 25$
d. $4x^2 + 20x + 10$

a. $4x^2 + 20x + 25$

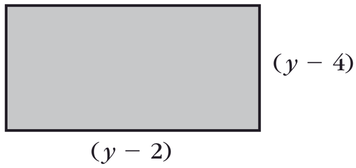
24. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo de la figura siguiente.



a. $x^2 + 24x + 10$
b. $x^2 + 10x + 24$
c. $x^2 + 10x + 10$
d. $x^2 + 10x + 12$

b. $x^2 + 10x + 24$

25. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo de la figura siguiente.

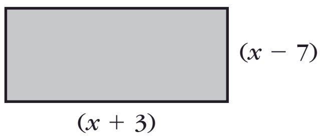


a. $y^2 - 6y - 8$
b. $y^2 + 6y + 8$
c. $y^2 - 6y - 6$
d. $y^2 - 6y + 8$

d. $y^2 - 6y + 8$

---

26. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo de la figura siguiente.

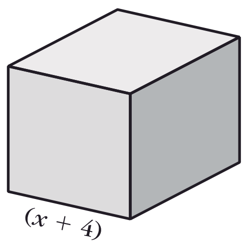


a. $x^2 - 4x + 21$
b. $x^2 - 21x - 4$
c. $x^2 - 4x - 21$
d. $x^2 + 4x - 21$

c. $x^2 - 4x - 21$

---

27. Determina la expresión polinomial del cubo de la figura siguiente.

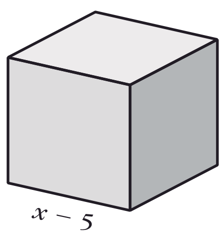


a. $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
b. $x^3 + 12x^2 + 24x + 64$
c. $x^3 + 24x^2 + 36x + 64$
d. $x^3 + 12x^2 + 24x + 12$

a. $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

---

28. Determina la expresión polinomial del volumen del cubo de la figura siguiente.

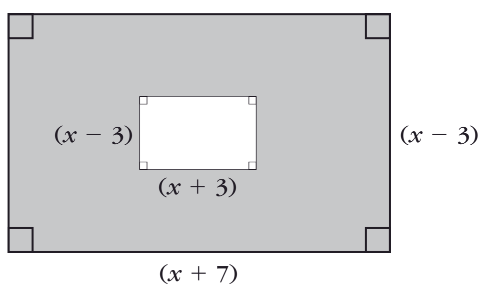


a. $x^3 - 15x^2 + 30x - 15$
b. $x^3 + 15x^2 - 75x + 125$
c. $x^3 - 15x^2 - 75x + 125$
d. $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

d. $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

---

29. Determina la expresión polinomial que corresponde al área de la región sombreada de la figura siguiente.



a. $4x - 12$
b. $2x^2 + 4x - 12$
c. $4x - 30$
d. $4x - 14$

a. $4x - 12$

División de polinomios

Primero se considerará la división entre monomios, luego la de un polinomio entre un monomio y finalmente la de dos polinomios. Cabe aclarar que en todos los ejercicios se supondrá que *todos los divisores son diferentes de cero*.

División de un monomio entre un monomio

Para dividir un monomio entre un monomio se siguen estos pasos:

1. Se dividen los coeficientes numéricos.
2. Se aplica la ley de los exponentes correspondiente.

Ejemplo 14

Efectúa las divisiones entre los monomios siguientes:

a. $\dfrac{8a^{15}}{2a^{10}}$

b. $\dfrac{15x^4}{-3x}$

c. $\dfrac{-16a^6b^7}{-4a^2b^3}$

d. $\dfrac{20n}{4n^6}$

e. $\dfrac{4a^5b^2}{8ab^3}$

f. $\dfrac{-6m^6nw^5}{-18mn^4w^5}$

Solución

a. $\dfrac{8a^{15}}{2a^{10}} = \left(\dfrac{8}{2}\right)a^{15-10} = 4a^5$

b. $\dfrac{15x^4}{-3x} = \left(\dfrac{15}{-3}\right)x^{4-1} = -5x^3$

c. $\dfrac{-16a^6b^7}{-4a^2b^3} = \left(\dfrac{-16}{-4}\right)\left(\dfrac{a^6}{a^2}\right)\left(\dfrac{b^7}{b^3}\right) = 4a^{6-2}b^{7-3} = 4a^4b^4$

d. $\dfrac{20n}{4n^6} = \left(\dfrac{20}{4}\right)n^{1-6} = 5n^{-5} = \dfrac{5}{n^5}$

e. $\dfrac{4a^5b^2}{8ab^3} = \left(\dfrac{4}{8}\right)a^{5-1}b^{2-3} = \dfrac{1}{2}a^4b^{-1} = \dfrac{a^4}{2b}$

f. $\dfrac{-6m^6nw^5}{-18mn^4w^5} = \left(\dfrac{-6}{-18}\right)m^{6-1}n^{1-4}w^{5-5} = \left(\dfrac{1}{3}\right)m^5n^{-3}w^0 = \dfrac{m^5}{3n^3}$

Observa que no siempre la división de dos monomios resulta en un monomio, como sucede en los ejemplos *d, e* y *f.*

División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la propiedad distributiva de la división, es decir, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo 15

Realiza las divisiones siguientes:

a. $\dfrac{15x^3 - 12x^2 + 6x}{3x}$

b. $\dfrac{12a^3b - 8a^2b^2 - 2ab}{2ab}$

c. $\dfrac{6x^3y^2 - 4x^2y^3 - 8xy^3}{-2x^2y^3}$

Solución

a. $\dfrac{15x^3 - 12x^2 + 6x}{3x} = \dfrac{15x^3}{3x} - \dfrac{12x^2}{3x} + \dfrac{6x}{3x} = 5x^2 - 4x + 2$

b. $\dfrac{12a^3b - 8a^2b^2 - 2ab}{2ab} = \dfrac{12a^3b}{2ab} - \dfrac{8a^2b^2}{2ab} - \dfrac{2ab}{2ab} = 6a^2 - 4ab - 1$

c. $\dfrac{6x^3y^2 - 4x^2y^3 - 8xy^3}{-2x^2y^3} = \dfrac{6x^3y^2}{-2x^2y^3} - \dfrac{4x^2y^3}{-2x^2y^3} - \dfrac{8xy^3}{-2x^2y^3} = -\dfrac{3x}{y} + 2 + \dfrac{4}{x}$

Observa de nuevo que la división de un polinomio entre un monomio no siempre da como resultado un polinomio, como se advierte en el ejemplo *c*.

División de polinomios

La división euclidiana de dos polinomios, al igual que la división de números enteros dentro del dominio entero, permite encontrar como resultado del proceso de división un polinomio cociente y un polinomio residuo, y para efectuarla se seguirán estos pasos:

1. Se ordenan los dos polinomios en orden decreciente de una de las letras comunes a ambos polinomios, incluidos los términos con coeficiente cero para las potencias faltantes.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término cociente.
3. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo, y se obtiene un nuevo dividendo.
4. Con el nuevo dividendo se repiten las operaciones de los pasos 2 y 3 hasta que el polinomio resultante sea cero o contenga la letra respecto a la que se hizo el procedimiento del primer paso, con un exponente menor que el que posee dicha letra en el divisor.
5. Se comprueba que el resultado sea correcto, multiplicando el cociente por el divisor y al producto obtenido se le suma el residuo de la división. El resultado debe coincidir con el polinomio dividendo.

En el ejemplo que sigue se ilustra este procedimiento.

Ejemplo 16

Efectúa las divisiones siguientes entre polinomios.

a. $(x^4 + 6x^2 - 5x^3 - 7x + 4) \div (x^2 - 3x + 6)$

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-6 \\ \cline{2-2}
x^2-3x+6 & x^4-5x^3+6x^2-7x+4 \\
 & -x^4+3x^3-6x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -2x^3+0x^2-7x \\
 & \quad +2x^3-6x^2+12x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -6x^2+5x+4 \\
 & \qquad +6x^2-18x+36 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -13x+40
\end{array}
$$

Por tanto, el cociente es $x^2 - 2x - 6$ y el residuo es $-13x + 40$.

Nota: haz la comprobación de los ejemplos de la división.

b. $(10x^4 - 17x^3y + 9x^2y^2 - 36xy^3 - 8y^4) \div (2x^2 - 5xy + y^2)$

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2+4xy+12y^2 \\ \cline{2-2}
2x^2-5xy+y^2 & 10x^4-17x^3y+9x^2y^2-36xy^3-8y^4 \\
 & -10x^4+25x^3y-5x^2y^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad 8x^3y+4x^2y^2-36xy^3 \\
 & \quad -8x^3y+20x^2y^2-4xy^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 24x^2y^2-40xy^3-8y^4 \\
 & \qquad -24x^2y^2+60xy^3-12y^4 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 20xy^3-20y^4
\end{array}
$$

Como el ordenamiento del dividendo y del divisor se hizo respecto a la x, aquí termina la división, ya que el exponente de la x en el nuevo dividendo es menor que el exponente de la literal x del primer término del divisor:

Cociente: $5x^2 + 4xy + 12y^2$; residuo: $20xy^3 - 20y^4$

c. $(a^3 - b^3) \div (a - b)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+ab+b^2 \\ \cline{2-2}
a-b & a^3+0a^2b+ab^2-b^3 \\
 & -a^3+a^2b \\ \cline{2-2}
 & \quad a^2b+0ab^2 \\
 & \quad -a^2b+ab^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad ab^2-b^3 \\
 & \qquad -ab^2+b^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Cociente: $a^2 + ab + b^2$; residuo $= 0$

Ejercicios 9

I. *Efectúa las divisiones siguientes de un monomio entre otro.*

1. $\dfrac{9x^7y^5}{3x^3y} =$

4. $\dfrac{-14a^7b^5c^2d^2}{-7a^3bc^3d^2} =$

2. $\dfrac{42a^4b^2c}{-7a^2b^2c^4} =$

5. $\dfrac{-81x^3y^5}{9xy^6} =$

3. $\dfrac{25a^7b^9c^4d}{-5a^4b^3cd} =$

6. $\dfrac{-21x^8yz}{-3x^5y^2z} =$

II. *Haz las divisiones siguientes de un polinomio entre un monomio.*

7. $\dfrac{9a^2 - 3a + 6}{3a} =$

9. $\dfrac{6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 8x^2y^4}{-2x^2y^2} =$

8. $\dfrac{-12a^2 + 6ab - 15a^2b^2}{3a} =$

10. $\dfrac{9x^6y^3 - 6x^4y^2 - 3x^2y^5}{3x^2y} =$

III. *Realiza las divisiones siguientes de un polinomio entre otro. (Elige la opción correcta.)*

11. $(x^2 - 9x + 20) \div (x + 2)$

a. cociente $x - 11$, residuo -2

b. cociente $x + 11$, residuo 2

c. cociente $x - 11$, residuo 42

d. cociente $x - 7$, residuo 6

c. cociente $x - 11$, residuo 42

12. $(x^3 + 5x^2 - x - 21) \div (x + 3)$

a. cociente: $x^2 + 2x - 7$, residuo 0

b. cociente: $x^2 + 2x - 7$, residuo -42

c. cociente: $x^2 + 8x - 5$, residuo 0

d. cociente: $x^2 + 2x - 5$, residuo 14

a. cociente: $x^2 + 2x - 7$, residuo 0

13. $(x^2 - 5x - 12) \div (x - 4)$

a. cociente: $x - 1$, residuo -8

b. cociente: $x - 1$, residuo 8

c. cociente: $x - 1$, residuo 16

d. cociente: $x - 1$, residuo -16

d. cociente: $x - 1$, residuo -16

14. $(x^3 + 7x^2 + x - 47) \div (x + 4)$

a. cociente: $x^2 - 11x + 12$, residuo -48

b. cociente: $x^2 - 4x - 16$, residuo -7

c. cociente: $x^2 + 3x - 11$, residuo -3

d. cociente: $x^2 + 3x - 11$, residuo 3

c. cociente: $x^2 + 3x - 11$, residuo -3

15. $(x^3 - 7x^2 + 14x - 1) \div (x - 4)$

a. cociente: $x^2 - 3x - 2$, residuo 5

b. cociente: $x^2 - 3x + 2$, residuo 7

c. cociente: $x^2 + 3x + 2$, residuo -9

d. cociente: $x^2 - 3x - 2$, residuo 9

b. cociente: $x^2 - 3x + 2$, residuo 7

---

16. $(x^3 + 27) \div (x + 3)$

a. cociente: $x^2 - 3x - 9$, residuo 0

b. cociente: $x^2 - 3x - 9$, residuo 54

c. cociente: $x^2 - 3x + 9$, residuo 54

d. cociente: $x^2 - 3x + 9$, residuo 0

d. cociente: $x^2 - 3x + 9$, residuo 0

---

17. $36x^3 - 73x^2y + 35xy^2 \div (9x^2 - 7xy)$

a. cociente: $4x - 5y$, residuo: 0

b. cociente: $4x - 5y$, residuo: $70xy$

c. cociente: $4x + 5y$, residuo: 0

d. cociente: $4x + 5y$ residuo $-70xy$

a. cociente: $4x - 5y$, residuo: 0

---

18. $(8x^3 + 2x^2y - 8xy^2 - 2y^3 \div (4x^2 - 3xy - y^2)$

a. cociente: $2x - 2y$

b. cociente: $2x - 2y$, residuo $4y^2$

c. cociente: $2x + 2y$

d. cociente: $2x - 2y$, residuo $-4y^2$

c. cociente: $2x + 2y$

---

19. $(12a^3 - 28a^2b + 13ab^2 - b^3) \div (6a + b)$

a. cociente: $2a^2 - 5ab + 3b^2$, residuo $-4b^2$

b. cociente: $2a^2 - 5ab + 3b^2$, residuo $-4b^2$

c. cociente: $2a^2 + 5ab - 3b^2$, residuo $-2b^2$

d. cociente: $2a^2 - 5ab + 3b^2$, residuo $2b^2$

a. cociente: $2a^2 - 5ab + 3b^2$, residuo $-4b^2$

20. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) \div (x^2 - 4)$

a. cociente: $x - 2$, residuo $2x - 8$

b. cociente: $x - 2$, residuo $-2x + 8$

c. cociente: $x - 2$, residuo $9x - 14$

d. cociente: $x - 2$, residuo $7x - 14$

a. cociente: $x - 2$, residuo $7x - 14$

Simplificación de expresiones algebraicas que tienen signos de agrupación

Como hemos señalado, los signos de agrupación son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { } que se utilizan para asociar algunos de los términos que intervienen en una expresión algebraica.

Para simplificar expresiones algebraicas que contengan uno o varios signos de agrupación se requiere suprimirlos o eliminarlos, para lo que se siguen estos criterios.

1. La supresión de signos de agrupación debe obedecer ante todo a las reglas que establecen el orden en que han de realizarse las operaciones algebraicas en una expresión dada (primero los productos y cocientes y después las sumas y restas). En caso contrario usaríamos signos de agrupación.
2. Si después de realizados los productos y las divisiones a un signo de agrupación le precede un signo (+), dicho símbolo se suprime sin modificar el signo de los términos que contiene. Si está precedido de un signo (−), dicho símbolo se suprime cambiando el signo de todos y cada uno de los términos que contiene.
3. Si en una expresión algebraica hay signos de agrupación contenidos dentro de otros, se suprimen de uno en uno y de dentro afuera.

Nota: no siempre es obligatorio suprimir signos de agrupación de dentro afuera; también puede hacerse a la inversa.

Ejemplo 17

Elimina los símbolos de agrupación y reduce términos semejantes:

a. $15x - 4\{4 - [2x(x - 6) - (x^2 + 8x - 6)]\}$

b. $\{4(2x - 5) - [(x + 7)(x - 2) - (x - 5)^2 - (x - 6)(x + 6)]\}$

Solución

a. $15x - 4\{4 - [2x(x - 6) - (x^2 + 8x - 6)]\}$
$= 15x - 4\{4 - [2x^2 - 12x - x^2 - 8x + 6]\}$
$= 15x - 4\{4 - [x^2 - 20x + 6]\}$
$= 15x - 4\{4 - x^2 + 20x - 6\}$
$= 15x - 4\{-x^2 + 20x - 2\}$
$= 15x + 4x^2 - 80x + 8$
$= 4x^2 - 65x + 8$

b. $\{4(2x - 5) - [(x + 7)(x - 2) - (x - 5)^2 - (x - 6)(x + 6)]\}$
$= \{8x - 20 - [x^2 + 5x - 14 - (x^2 - 10x + 25) - (x^2 - 36)]\}$
$= \{8x - 20 - [x^2 + 5x - 14 - x^2 + 10x - 25 - x^2 + 36]\}$
$= \{8x - 20 - [-x^2 + 15x - 3]\}$
$= \{8x - 20 + x^2 - 15x + 3\}$
$= \{-7x - 17 + x^2\}$
$= -7x - 17 + x^2$
$= x^2 - 7x - 17$

Ejercicios 10

I. *Elimina los signos de agrupación y reduce términos semejantes. (Elige la opción correcta.)*

1. $(4x^3 - 7x^2 + 6x - 1) - (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)$

a. $3x^3 + 10x^2 + 8x + 5$
b. $3x^3 - 10x^2 + 4x - 7$
c. $3x^3 - 10x^2 + 8x + 5$
d. $3x^3 - 10x^2 + 8x - 7$

c. $3x^3 - 10x^2 + 8x + 5$

2. $(5a - 3b + 2c - 19) - (9a + 7b - c + 6) + 4(a - b + 2c - 3)$

a. $-14b + 11c - 35$
b. $14b + 11c + 37$
c. $18a - 14b + 11c - 37$
d. $-14b + 11c - 37$

d. $-14b + 11c - 37$

3. $6(x - 2y) - 4(x - 3y) - (9x - y)$
   a. $-9x + 2y$
   b. $-7x - y$
   c. $-7x + y$
   d. $7x + y$

c. $-7x + y$

4. $6x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y) - (x^2 + 6y)]\}$
   a. $-5x^2 - 4y$
   b. $-7x^2 + 4y$
   c. $5x^2 - 4y$
   d. $-5x^2 + 4y$

a. $-5x^2 - 4y$

5. $4(x + 2) - 3\{2x + [4(x - 4) - 2(2x - 3)]\}$
   a. $10x - 24$
   b. $-2x - 24$
   c. $-2x + 36$
   d. $-2x + 38$

d. $-2x + 38$

6. $3a - 3\{b - 4[c + 2(a - b + 3c) - (a + 5c - 2b)]\}$
   a. $15a - 3b + 24c$
   b. $15a - 3b - 24c$
   c. $12a - 3b + 24c$
   d. $15a - 7b + 24c$

a. $15a - 3b + 24c$

7. $\{20x - [2x - (x + 2) - (6 - x^2) - (28 + x + x^2)]\}$

a. $20x - 36$

b. $20x + 36$

c. $22x + 36$

d. $20x + 40$

b. $20x + 36$

8. $2\{4(2a - b) - [5(b - 2a) - 4(a - 3b)]\}$

a. $46a - 40b$

b. $44a + 42b$

c. $44a - 40b$

d. $44a - 42b$

d. $44a - 42b$

Evaluación de expresiones algebraicas

El proceso de calcular el valor numérico de una expresión algebraica, cuando a cada número literal de ella se le asigna un valor específico, se llama *evaluación*.

Para efectuar la evaluación de una expresión algebraica se sustituye el valor específico de cada número literal en dicha expresión utilizando paréntesis, y a continuación se efectúan las operaciones correspondientes.

Ejemplo 18

Evalúa la expresión $5x - 3yz$ con $x = 4$, $y = -2$ y $z = 3$.

Solución

$$\begin{aligned} &5(4) - 3(-2)(3) \\ &= 20 + 6(3) \\ &= 20 + 18 \\ &= 38 \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Evalúa la expresión $x^3 - 7x^2 - 4x - 12$ si $x = -2$.

Solución

$$\begin{aligned} &(-2)^3 - 7(-2)^2 - 4(-2) - 12 \\ &= -8 - 7(4) + 8 - 12 \\ &= -8 - 28 + 8 - 12 \\ &= -40 \end{aligned}$$

Ejercicios 11

I. *Evalúa las expresiones algebraicas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. Evalúa $x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ con $x = 3$.

a. −17
b. 17
c. −20
d. 20

a. −17

2. Evalúa $x^3 + 6x^2 - 9x + 6$ con $x = -3$.

a. 52
b. 68
c. 60
d. 56

c. 60

3. Evalúa $y^4 - 5y^3 + 3y^2 - y + 1$ con $y = -2$.

a. 69
b. 75
c. 66
d. 71

d. 71

4. Evalúa $2x^4 - x^3 - 2x + 23$ con $x = -2$.

a. 67
b. 72
c. 60
d. 65

a. 67

5. Evalúa $4a^3 - 5b^2 - 7c + 20$ con $a = -2$, $b = -3$ y $c = -4$.

a. −32
b. −16
c. −29
d. −25

c. −29

6. Evalúa $5a^3 - 7b^2 + 4c - 5$ con $a = 2$, $b = -2$ y $c = -5$.

a. 13
b. −13
c. −17
d. −15

b. −13

7. Evalúa $4x^3 - 7y^3 - 5z - 4x$ con $x = -2$, $y = -1$ y $z = -3$.

a. 2
b. −2
c. −4
d. −5

b. −2

Evaluación

I. *Resuelve las operaciones siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. Halla la suma de los polinomios A, B y C, donde $A = 3x - 4y + 8a - 6$, $B = 3y - 7x - a - 10$ y $C = 5a + y - x + 8$.

a. $12a - 4x - 8y + 8$
b. $14a - 5x - 8$
c. $-12a + 5x - 8$
d. $12a - 5x - 8$
e. $12a - 4x - y - 8$

d. $12a - 5x - 8$

2. Resta el polinomio C de la suma de A y B.

a. $2a - 4x - y + 24$
b. $2a - 3x + 2y - 24$
c. $2a - 3x - 2y - 24$
d. $2a - 3x + 2y - 24$
e. $2a - 4x - 24$

c. $2a - 3x - 2y - 24$

3. Haz esta multiplicación: $(2x^4)(3x^3y)(-4x^3y)$.

a. $24x^{10}y$
b. $24x^{10}y^2$
c. $-24x^{10}y$
d. $-24x^9y^2$
e. $-24x^{10}y^2$

e. $-24x^{10}y^2$

---

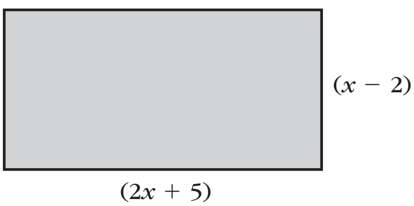
4. Efectúa esta multiplicación: $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

a. $x^3 + 4x^2y + 8xy^2 - 8y^3$
b. $x^3 - 4x^2y - 16x^2y^2 - 8y^3$
c. $x^3 - 8y^3$
d. $x^3 + 8y^3$
e. $x^3 - 4x^2y - 8xy^2 - 8y^3$

c. $x^3 - 8y^3$

---

5. Determina la expresión polinomial del área del rectángulo de la figura siguiente.

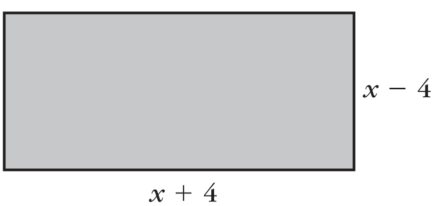


a. $2x^2 + x - 10$
b. $2x^2 - x - 10$
c. $2x^2 - x + 10$
d. $2x^2 + x + 10$

a. $2x^2 + x - 10$

---

6. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo de la figura siguiente.

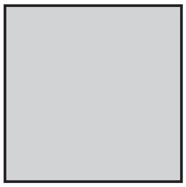


a. $x^2 - 8x + 16$
b. $x^2 + 8x + 16$
c. $x^2 - 16$
d. $x^2 + 16$

c. $x^2 - 16$

---

7. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del cuadrado de la figura siguiente.

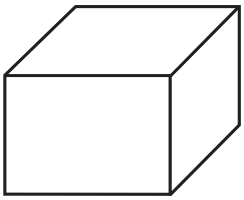


$(3x + 2)$

a. $9x^2 - 12x + 4$
b. $9x^2 + 12x + 4$
c. $9x^2 + 6x + 4$
d. $6x^2 - 12x + 4$

b. $9x^2 + 12x + 4$

8. Determina la expresión polinomial que corresponde al volumen del cubo de la figura siguiente.



$(x + 3)$

a. $x^3 - 27$
b. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
c. $x^3 + 9x^2 + 27x + 9$
d. $x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

b. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

9. Haz esta división algebraica: $(4x^3 - 5x^2 + 3x - 2) \div (x + 1)$
a. Cociente: $4x^2 - 9x + 12$; residuo -14
b. Cociente: $4x^2 + 9x - 6$; residuo 4
c. Cociente: $4x^2 - 9x + 13$; residuo -10
d. Cociente: $4x^2 - 9x + 12$; residuo 10

a. Cociente: $4x^2 - 9x + 12$; residuo -14

10. Elimina los signos de agrupación y reduce términos semejantes en

$$\{3(2x - y - 2) - 2\,[3(x - 2y + 4) - 5\,(2x - 3y + 2)]\}$$

a. $22x - 19y - 8$
b. $20x - 21y - 10$
c. $20x - 19y - 8$
d. $22x - 21y - 12$
e. $20x - 21y + 10$

b. $20x - 21y - 10$

11. Elimina signos de agrupación y reduce términos semejantes en

$$\{-(-6x^2 + 8x - 7) - [5x^2 - (8x + 16) + (6x^2 - 9)]\}$$

a. $-5x^2 + 32$
b. $5x^2 - 16x + 18$
c. $-5x^2 + 16x + 18$
d. $-5x^2 + 18$

a. $-5x^2 + 32$

Evaluación

1. Halla la suma de los polinomios A, B y C, donde

$A = 3a^2b - 8ab^2 - 4ab - 7b + 2a - 8$
$B = a^2b - 5ab^2 + 7ab + 3b - 5a - 10$
$C = 8b - 3a + 15ab^2 + ab + 2a^2b + 18$

a. $6a^2b + 2ab^2 + 4ab + 4b + 6a - 36$
b. $5a^2b + 2ab^2 + 3ab + 4b + 6a$
c. $6a^2b + 2ab^2 + 4ab + 4b - 6a$
d. $6a^2b + 2ab^2 + 5ab + 4b + 6a$

c. $6a^2b + 2ab^2 + 4ab + 4b - 6a$

2. Resta la suma de los polinomios B y C de A del ejercicio anterior.

$A - (B + C)$

a. $-18ab^2 - 12ab - 18b + 10a - 16$
b. $18ab^2 - 12ab - 16b + 10a + 14$
c. $6a^2b + 18ab^2 - 12ab + 16b + 12a + 16$
d. $-18ab^2 + 2ab^2 + 12ab + 16b + 12a + 14$

a. $-18ab^2 - 12ab - 18b + 10a - 16$

3. Efectúa esta multiplicación: $(-2x^2y^3)^3(3x^2y^2)^3$

a. $-54x^{12}y^9$
b. $54x^{12}y^9$
c. $-216x^{12}y^{15}$
d. $-216x^{12}y^9$
e. $216x^{12}y^9$

c. $-216x^{12}y^{15}$

4. Haz la multiplicación algebraica siguiente.

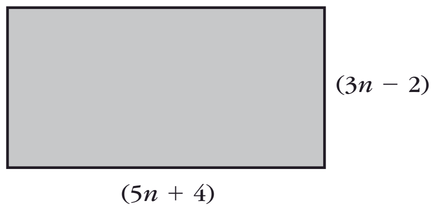
$$(3x^2 - x + 2)(2x^2 + x - 3)$$

a. $6x^4 + x^3 - 6x^2 + 5x - 6$
b. $6x^4 + x^3 - 14x^2 + x + 6$
c. $6x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 5x - 6$
d. $6x^4 - 8x^3 - 10x^2 - 7x + 6$
e. $6x^4 + x^3 - 8x^2 + x + 6$

e. $6x^4 + x^3 - 8x^2 + x + 6$

---

5. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo de la figura siguiente.

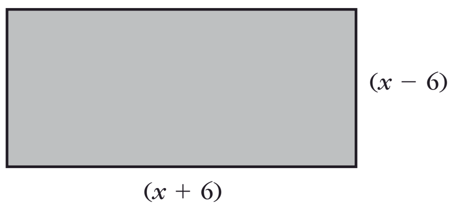


a. $15n^2 - 2n - 8$
b. $15n^2 + 2n + 2$
c. $15n^2 + 2n - 8$
d. $15n^2 + 2n + 8$

c. $15n^2 + 2n - 8$

---

6. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo de la figura siguiente.

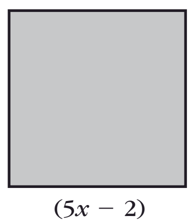


a. $x^2 - 12x - 36$
b. $x^2 - 12x + 36$
c. $x^2 - 36$
d. $x^2 + 36$

c. $x^2 - 36$

---

7. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del cuadrado de la figura siguiente.

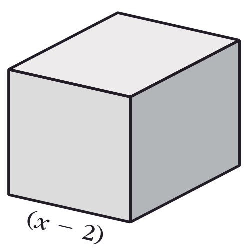


a. $25x^2 - 10x + 4$
b. $25x^2 - 20x - 4$
c. $25x^2 + 20x + 4$
d. $25x^2 - 20x + 4$

d. $25x^2 - 20x + 4$

---

8. Determina la expresión polinomial que corresponde al volumen del cubo de la figura siguiente.



a. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
b. $x^3 + 3x^2 + 12x + 6$
c. $x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
d. $x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

a. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

9. Haz la división algebraica siguiente.

$$(5x - 6x^2 + 8x^3 + 46) \div (2x + 3)$$

a. $4x^2 - 9x + 16$, residuo 2
b. $4x^2 + 3x + 7$, residuo 67
c. $4x^2 - 7x + 15$, residuo 0
d. $4x^2 - 9x + 16$, residuo 0
e. $4x^2 - 9x + 16$, residuo -2

e. $4x^2 - 9x + 16$, residuo -2

10. Elimina los signos de agrupación y reduce términos semejantes.

$$-2\{3(a - b + w) - 4\,[6(2a - w - 4b) - 5\,(3a - 4b - 2w)]\}$$

a. $30a + 26b - 26w$
b. $-30a + 38b - 26w$
c. $30a - 38b - 26w$
d. $-30a - 26b + 26w$
e. $-30a - 26b + 36w$

d. $-30a - 26b + 26w$

11. Elimina signos de agrupación y reduce términos semejantes.

$$(5a - 3b + 2c - 19) - (9a + 7b - c + 6) + 4(a - b + 2c - 3)$$

a. $-14b + 11c - 37$
b. $-14b + 10c - 37$
c. $14b + 11c + 37$
d. $-14b + 11c - 30$
e. $18a - 14b + 9c - 30$

a. $-14b + 11c - 37$

Evaluación

I. *Dados los polinomios* $x^2 - 2x - 3$, $4x^2 + 2x + 1$ y $3x^2 + 5x - 7$, *efectúa los ejercicios 1 y 2. (Elige la opción correcta.)*

1. Halla la suma de los polinomios.
a. $7x^2 + 5x - 9$
b. $8x^2 + 5x + 9$
c. $8x^2 + 7x - 9$
d. $8x^2 + 5x - 9$

d. $8x^2 + 5x - 9$

2. Resta $4x^2 + 2x + 1$ de la suma de los otros polinomios.

a) $2x + 3$
b) $2x^2 + x - 11$
c) $-2x^2 - x - 11$
d) $x - 9$
e) $x - 11$

e. $x - 11$

---

3. Efectúa esta multiplicación algebraica: $(-8x^2y)(-3x^4y^5)^4$.

a. $648x^{10}y^{10}$
b. $-648x^{10}y^{10}$
c. $648x^{18}y^{21}$
d. $-648x^{20}y^{19}$
e. $-648x^{18}y^{21}$

e. $-648x^{18}y^{21}$

---

4. Haz la multiplicación algebraica siguiente.

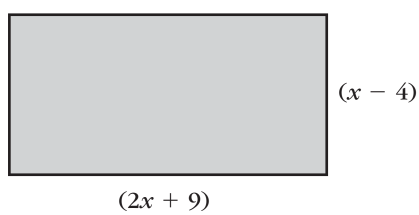
$$(5x^3 + 3x^2 - 2x + 1)(4x - 5)$$

a. $20x^4 + 13x^3 + 23x^2 + 14x - 5$
b. $20x^4 - 11x^3 + 23x^2 + 16x + 5$
c. $20x^4 - 15x^3 + 19x^2 + 12x - 5$
d. $20x^4 - 13x^3 - 23x^2 + 14x - 5$
e. $20x^4 - 13x^3 + 21x^2 + 18x - 5$

d. $20x^4 - 13x^3 - 23x^2 + 14x - 5$

---

5. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo de la figura siguiente.

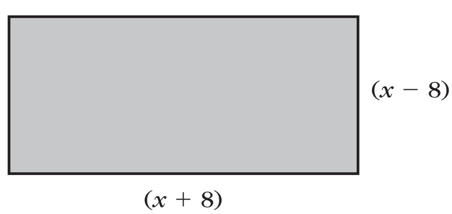


a. $2x^2 + x + 36$
b. $2x^2 - x - 36$
c. $2x^2 - x + 36$
d. $2x^2 + x - 36$

d. $2x^2 + x - 36$

---

6. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del rectángulo de la figura siguiente.

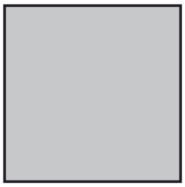


a. $x^2 - 64$
b. $x^2 - 16x - 64$
c. $x^2 - 16x + 64$
d. $x^2 + 64$

a. $x^2 - 64$

---

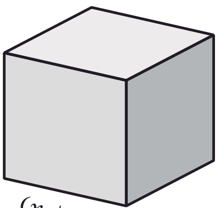
7. Determina la expresión polinomial que corresponde al área del cuadrado de la figura siguiente.



a. $25x^2 - 15x + 9$
b. $25x^2 - 15x - 9$
c. $25x^2 - 30x - 9$
d. $25x^2 - 30x + 9$

d. $25x^2 - 30x + 9$

8. Determina la expresión polinomial que corresponde al volumen del cubo de la figura siguiente.



a. $x^3 + 12x + 24x + 12$
b. $x^3 + 12x + 48x + 64$
c. $x^3 + 12x + 48x + 62$
d. $x^3 + 12x + 54x + 64$

b. $x^3 + 12x + 48x + 64$

9. Efectúa la división algebraica siguiente.

$$(8x^3 - x + 28 - 27x^2) \div (x - 3)$$

a. cociente: $8x^2 - 3x - 10$, residuo -2
b. cociente: $8x^2 - 3x - 10$, residuo 58
c. cociente: $8x^2 - 3x + 10$, residuo 12
d. cociente: $8x^2 + 3x - 15$, residuo -5

a. cociente: $8x^2 - 3x - 10$, residuo -2

10. Elimina signos de agrupación y reduce términos semejantes.

$$\{(3m - 2n)^2 - [(m^2 - 5mn - 7n^2) - (5m^2 - 6mn - 9n^2)]\}$$

a. $13m^2 - 15mn - 2n^2$
b. $5m^2 - 11mn + 6n^2$
c. $13m^2 - 13mn - 2n^2$
d. $5m^2 - 13mn + 2n^2$
e. $13m^2 - 13mn + 2n^2$

d. $5m^2 - 13mn + 2n^2$

7

Factorización

- Factorización de polimonios cuando todos sus términos tienen un monomio factor común
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto
- Factorización de trinomios cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$
- Factorización por agrupamiento
- Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + br + c$, por agrupación, con a, b y c enteros y $a \neq 0$
- Factorización de suma y diferencia de cubos
- Teorema de binario

Factorizar una expresión algebraica es reescribirla como el producto de sus factores. Por ejemplo, $x^2 - y^2$ puede expresarse como

$$(x + y)(x - y)$$

La multiplicación algebraica consiste en encontrar el producto de dos o más factores. En este capítulo aprenderemos a resolver el problema inverso: dado un producto, determinaremos sus factores. Limitaremos nuestro estudio a la descomposición en factores de polinomios con coeficientes enteros.

Es importante tener presente que no todo polinomio puede factorizarse. Así como en aritmética hay números primos, también en álgebra hay *polinomios primos*, aquellos cuyas expresiones algebraicas sólo son divisibles entre ellas mismas y la unidad; es decir, no pueden expresarse como el producto de otras expresiones algebraicas. Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios primos

$$a + b$$
$$x^2 + y^2$$
$$3x + 5y^2$$

Veamos a continuación tipos de factorización de polinomios.

Factorización de polinomios cuando todos sus términos tienen un monomio factor común

Cuando cada uno de los términos de un polinomio tiene un factor común, la ley distributiva de la multiplicación nos permite expresarlo como el producto de dos factores, de los cuales uno es el monomio factor común. Por ejemplo

$$2a + 2b = 2(a + b)$$
$$ax - ay = a(x - y)$$

Para efectuar este tipo de factorización se siguen los pasos descritos a continuación.

Factorización de polinomios cuyos términos tienen un monomio factor común

1. Se determina el máximo factor común (MFC) de los coeficientes numéricos de los términos del polinomio, el cual, como recordarás (capítulo 3), es el máximo común divisor; en otras palabras, el MFC es el número que resulta del producto de los factores primos comunes a todos ellos afectados por sus potencias mínimas.
2. Se encuentra el MFC de las partes literales de cada uno de los términos del polinomio, el cual será el producto de los factores literales comunes a todas ellas afectadas por su mínima potencia.
3. Se localiza el MFC del polinomio, el cual es el monomio que resulta al multiplicar el máximo común divisor de los coeficientes numéricos del polinomio por el MFC de las partes literales de sus términos.
4. Se expresa cada uno de los términos del polinomio como el producto del MFC por el monomio que resulta al dividir cada término entre dicho MFC.
5. La expresión que resulta del paso anterior se factoriza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación.

Ejemplo 1

Determina el máximo factor común (MFC) de los polinomios siguientes y factorízalos.

a. $8a^2 - 32a^3 - 24a$

Solución

Observa que 32 y 24 son divisibles entre 8; por tanto, este número es el máximo factor común (MFC) de 8, 24 y 32 (pues $24 = 8 \times 3$; $32 = 8 \times 4$).

El MFC de la parte literal es a; por ende, el MFC del polinomio es $8a$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} 8a^2 - 32a^3 - 24a &= 8a\left(\frac{8a^2}{8a}\right) - 8a\left(\frac{32a^3}{8a}\right) + 8a\left(\frac{-24a}{8a}\right) \\ &= 8a(a) + 8a(-4a^2) + 8a(-3) \\ &= 8a(a - 4a^2 - 3)\text{; luego} \\ &= 8a^2 - 32a^3 - 24a \\ &= 8a(a - 4a^2 - 3) \end{aligned}$$

b. $16x^3y^2 - 24x^4y^2z - 40x^5y^3b$

Primero descompongamos los coeficientes numéricos en sus factores primos.

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$16 = 2^4$ $\qquad 24 = 2^3 \times 3$ $\qquad 40 = 2^3 \times 5$

El único primo que aparece en las tres descomposiciones es el número 2, y su mínima potencia es 3; por tanto, el MFC de los coeficientes numéricos del polinomio es $2^3 = 8$.

Los factores comunes de las partes literales son xy y sus mínimas potencias son 3 y 2, respectivamente; por tanto, el MFC de las partes literales es x^3y^2. Así, el máximo factor común del polinomio es $8x^3y^2$; luego

$$16x^3y^2 - 24x^4y^2z - 40x^5y^3b = 8x^3y^2\left[\left(\frac{16x^3y^2}{8x^3y^2}\right) - \left(\frac{24x^4y^2z}{8x^3y^2}\right) - \left(\frac{40x^5y^3b}{8x^3y^2}\right)\right]$$
$$= 8x^3y^2(2 - 3xz - 5x^2yb)$$

Ejercicios 1

I. *Determina el máximo factor común* (MFC) *de los polinomios siguientes y factorízalos.*

1. $20ab^2 - 15a^2b$

2. $m^5 - 2m^2 + 6m$

3. $25y^3 - 15y^2 - 10y$

4. $54x^2y^3 - 18xy^2 + 36ax^3y^5$

5. $15xy^3 - 35x^2y + 20x^3y^2$

6. $56ax^5 - 14x^2y^2 - 28x^3$

7. $15n^2m^3 - 60n^3m^2 - 35nm^5$

8. $ax^2 - yx^2 + 6x^2$

9. $x^2 - 8x^3 - 7x^4$

10. $35m^2n - 42m^4n^2 + 21m^3n^3$

11. $ax + bx$

17. $4x - 24y$

12. $2a - 8b$

18. $6xy - 3y^2$

13. $8x^3 - 12x^4$

19. $a(x + 2) + b(x + 2)$

14. $na - ma$

20. $2(y - 3) - y(y - 3)$

15. $2x + x^2$

21. $5x(b - 6) - 4(b - 6)$

16. $b^2 + 3b$

22. $7a(a - b) + a - b$

23. $a(n + 6) + n + 6$

24. $x(c + 1) - c - 1$

25. $x(y + 2) - y - 2$

Diferencia de cuadrados

Recuerda que al multiplicar dos binomios conjugados, el producto que resulta es una diferencia de cuadrados; por tanto, toda expresión de este tipo puede expresarse inversamente como el producto de dos binomios conjugados. Por ejemplo:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Para factorizar una diferencia de cuadrados se siguen estos pasos.

Procedimiento para factorizar una diferencia de cuadrados

1. Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos.
2. Se construye un binomio con las raíces obtenidas en el paso anterior, escribiendo el signo negativo ($-$) entre ellas. (También puede ser el signo $+$.)
3. Se multiplica el binomio que resulta del paso anterior por su conjugado.

Respecto a la raíz cuadrada de la parte literal de un monomio, recuerda que:

$$\sqrt{x^2} = |x|; \text{ decir,}$$
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= x \text{ si } x > 0\\ &= -x \text{ si } x < 0\\ &= 0 \text{ si } x = 0\end{aligned}$$

Sin embargo, como señalamos en el capítulo 2, cuando aparezcan literales dentro de un radical en esta obra supondremos que representan números positivos a fin de que las respuestas se expresen sin signos de valor absoluto. Para encontrar la raíz cuadrada de un término literal que tenga como exponente un múltiplo de 2 (como 2, 4, 6, 8,… etc.) utilizaremos la regla siguiente:

$$\sqrt{x^m} = x^{m/2}$$

Éstos son algunos ejemplos

$$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$

$$\sqrt{y^8} = y^{8/2} = y^4$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de este tipo de factorización.

Ejemplo 2

Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes.

a. $x^2 - 9$

Solución

$$\sqrt{x^2} = x$$
$$\sqrt{9} = 3$$

Luego

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

o también se puede expresar así, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación

$$(x - 3)(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$$

b. $25y^2 - 16$

Solución

$$\sqrt{25y^2} = 5y$$
$$\sqrt{16} = 4$$

Por tanto

$$25y^2 - 16 = (5y - 4)(5y + 4)$$

c. $6n^2 - 6m^2$

Solución

Observa que 6 es un factor común de los términos del binomio; luego

$$6n^2 - 6m^2 = 6(n^2 - m^2)$$

A continuación descompongamos $n^2 - m^2$ en sus factores

$$6(n^2 - m^2) = 6(n + m)(n - m) = 6(n - m)(n + m)$$

d. $b^2(y - 2) - 64(y - 2)$

Solución

Primero observa que $(y - 2)$ es un factor común de los términos de la expresión anterior; por tanto

$$b^2(y - 2) - 64(y - 2) = (y - 2)(b^2 - 64)$$

A continuación descompongamos en sus factores la expresión $b^2 - 64$

$$(y - 2)(b^2 - 64) = (y - 2)(b - 8)(b + 8)$$

Ejercicios 2

I. *Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $y^2 - 81$	**2.** $16 - y^2$	**3.** $b^2 - 1$

4. $100 - w^2$

10. $y^2 - 4$

16. $36m^2 - 1$

5. $25 - 49y^2$

11. $25x^2 - 36$

17. $4 - 49a^2b^2$

6. $a^4 - 9$

12. $4a^2 - 1$

18. $y^6 - 16$

7. $36x^2 - 1$

13. $ax^2 - 16a$

19. $x^2(x + 3) - y^2(x + 3)$

8. $64b^2 - 25$

14. $bx^2 - b$

20. $a^2(m - n) - 4(m - n)$

9. $16b^2 - 100y^2$

15. $64z^2 - 81$

21. $a^2(x - y) - (x - y)$

22. $a^2(a^2 - 1) - 9(a^2 - 1)$

23. $a^2(1 - x^2) - b^2(1 - x^2)$

24. $a^3 - a$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado es perfecto cuando es el producto de un binomio al cuadrado. Así, el trinomio $x^2 + 2xy + y^2$ es cuadrado perfecto porque es el producto que resulta al elevar $x + y$ al cuadrado; es decir

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Cuando se requiere factorizar un trinomio cuadrado es recomendable verificar si se trata de un cuadrado perfecto. Para hacerlo es importante tener presente sus características:

- Si el trinomio está ordenado en relación con una literal, su primero y último términos son positivos y tienen raíz cuadrada perfecta.
- El segundo término es el doble del producto de las raíces de los términos cuadráticos, en valor absoluto, es decir, sin importar el signo que le precede.

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado del binomio que resulta al extraer raíz cuadrada de los términos cuadráticos, escribiendo entre ellos el signo del término no cuadrático.

Ejemplo 3

Comprueba que los trinomios siguientes son cuadrados perfectos y factorízalos.

a. $4x^2 + 20xy + 25y^2$

Solución

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$\sqrt{25y^2} = 5y$$

$$2(2x)(5y) = 20xy$$

Por consiguiente

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2$$

b. $y^2 - 16y + 64$

Solución

$$\sqrt{y^2} = y$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$2(y)(8) = 16y$$

Por tanto

$$y^2 - 16y + 64 = (y - 8)^2$$

Ejercicios 3

I. *Indica cuáles de los trinomios cuadráticos siguientes son perfectos y factoriza los que lo sean.*

1. $4x^2 - 4xy + y^2$

2. $49x^2 - 42xy + 9y^2$

3. $36a^2 - 30ab + 25b^2$

4. $25a^2 + 40ab + 16b^2$

5. $y^2 - 10y - 25$

6. $n^2 + 18n + 64$

7. $x^2 - 12x^2y + 36y^2$

8. $9n^2 + 48nm + 64m^2$

9. $b^2 - 10b + 36$

10. $a^2 + 14a + 49$

Factorización de trinomios cuadrados de la forma $x^2 + bx + c$

Las expresiones de este tipo —por ejemplo, $x^2 - 7x + 12$, $x^2 + 9x + 14$—, que representan polinomios que no son primos, son polinomios que pueden factorizarse y resultan de multiplicar dos binomios de la forma $(x + m)(x + n)$ que tienen las características siguientes:

- Tienen un término común, el cual es la raíz cuadrada del término x^2, es decir, x.

- Los términos no comunes son aquellos que al sumarse resultan en el valor del coeficiente del término bx; es decir, igual a b y cuyo producto es igual a c. De acuerdo con esto:

$$mn = c$$
$$m + n = b$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4

a. Factoriza $x^2 + 3x - 10$.

Solución

$(x + 5)(x - 2)$ es la factorización de $x^2 + 3x - 10$ debido a lo siguiente:

- Los binomios que se multiplican tienen a la literal x como término común.
- El producto de los términos no comunes es -10.
- La suma de esos términos no comunes es $5 + (-2) = 3$.

b. Factoriza $x^2 - 10x + 16$

$(x - 8)(x - 2)$ es la factorización de $x^2 - 10x + 16$, ya que:

- Los factores (binomios) tienen a x como término común.
- El producto de sus términos no comunes es $(-8)(-2) = 16$.
- La suma de sus términos no comunes es $-8 + (-2) = -8 - 2 = -10$.

De lo expuesto en el ejemplo anterior puede deducirse la regla siguiente para factorizar este tipo de trinomios cuadráticos.

Factorización de trinomios cuadrados de la forma $x^2 + bx + c$

Los factores de un trinomio cuadrado de la forma $x^2 + bx + c$, no primo, son dos binomios con un término común, el cual se obtiene al sacar raíz cuadrada al término cuadrático (x^2). Los otros dos términos de los binomios son dos números cuyo producto es c y cuya suma es b.

Ejemplo 5

Factoriza los trinomios cuadrados siguientes:

a. $x^2 + 7x + 12$

Solución

Primero encuentra todos los pares de números enteros cuyo producto sea 12 y después, de esos pares, selecciona aquel cuya suma sea 7.

Como el producto (12) es positivo, los dos números que se buscan deben ser del mismo signo, y como la suma (7) también es positiva, los dos números que se buscan deben ser ambos de signo positivo.

		Suma de los factores
1	12	13
2	6	8
3	**4**	**7**

Los números buscados son 3 y 4. Ahora se factoriza el trinomio utilizando esos números:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

b. $x^2 + x - 20$

Primero se determinan todas las parejas de números cuyo producto sea -20 y después, de todas ellas, se selecciona aquella cuya suma sea igual a 1. Como el producto de los números buscados es -20, es obvio que dichos números tienen signos diferentes y el signo de aquel con mayor valor absoluto será el signo del coeficiente de la x.

		Suma de los factores
1	-20	-19
2	-10	-8
4	-5	-1
5	**-4**	**1**
10	-2	8
20	-1	19

Los números que se buscan son 5 y -4. Ahora se factoriza el trinomio utilizando esos números:

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

c. $x^2 - 5x - 36$

Nuevamente se determinan primero todos los pares de números enteros cuyo producto sea (-36) y después, de todos ellos, se selecciona la pareja cuya suma sea (-5). Como el producto (-36) es negativo, los números buscados tendrán signo diferente (aquel con mayor valor absoluto será negativo).

		Suma de los factores
1	-36	-35
2	-18	-16
3	-12	-9
4	**-9**	**-5**
6	-6	0
9	-4	5
18	-2	16
36	-1	35

Los números buscados son 4 y -9. En seguida se factoriza el trinomio

$$x^2 - 5x - 36 = (x + 4)(x - 9)$$

d. $x^2 - 10x + 24$

En este ejemplo el producto (24) es positivo, lo cual indica que los dos números buscados tienen el mismo signo. Por otro lado, su suma (-10) es negativa, lo cual indica que los dos números buscados tienen signo negativo.

		Suma de los factores
-1	-24	-25
-2	-12	-14
-4	**-6**	**-10**
-3	-8	-11

Los números buscados son -4 y -6; ahora se factoriza:

$$x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$$

Es importante señalar que, dado el trinomio $x^2 + bx + c$, con b y c enteros, no siempre pueden encontrarse enteros m y n tales que $mn = c$ y $m + n = b$.

Por ejemplo, si se da el trinomio $x^2 + 2x + 4$, no es posible encontrar dos enteros tales que su producto sea 4 y su suma sea 2.

En estos casos el trinomio es *irreducible en enteros*.

Regla del discriminante para verificar si un trinomio cuadrado se puede factorizar

Cuando se trata de factorizar un trinomio cuadrado de la forma $x^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx + c$ (veremos este tipo de factorizaciones más adelante) puede ocurrir que se presente gran dificultad. En este caso es recomendable comprobar si el trinomio es un polinomio primo; en otras palabras, hay que verificar si el trinomio puede factorizarse, para lo cual puede emplearse la regla del discriminante.

La fórmula del discriminante (d) es $d = b^2 - 4ac$, donde:

a = coeficiente de x^2

b = coeficiente de x

c = término independiente o constante

Regla del discriminante para determinar si un trinomio cuadrado puede factorizarse

- Si el discriminante de un trinomio cuadrado escrito de la forma $x^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx + c$ tiene raíz cuadrada perfecta, entonces la expresión puede factorizarse.
- Si el discriminante no tiene raíz cuadrada perfecta, entonces la expresión es un polinomio primo; es decir, sólo es divisible entre sí misma y entre la unidad; por tanto, no puede factorizarse.
- Si el discriminante es cero, entonces el trinomio es cuadrado perfecto.

Ejemplo 6

Determina si los trinomios cuadrados siguientes pueden factorizarse.

a. $2x^2 - 7x + 6$

Solución

En este caso, $a = 2$; $b = -7$ y $c = 6$, de manera que el discriminante es

$$d = b^2 - 4ac$$
$$d = (-7)^2 - 4(2)(6)$$
$$d = 49 - 48$$
$$d = 1$$
$$\sqrt{1} = 1$$

Luego, $2x^2 - 7x + 6$ sí se puede factorizar.

b. $x^2 - 10x + 3$

Solución

Aquí $a = 1$; $b = -10$ y $c = 3$, de manera que el discriminante es

$$d = b^2 - 4ac$$
$$d = (-10)^2 - 4(1)(3)$$
$$d = 100 - 12$$
$$d = 88$$

Como 88 no tiene raíz cuadrada perfecta, entonces $x^2 - 10x + 3$ no puede factorizarse.

Ejercicios 4

I. *Factoriza las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $x^2 + 7x + 10$
2. $x^2 - 8x + 15$
3. $x^2 - 7x - 18$
4. $x^2 + 11x + 28$
5. $x^2 - 6x - 7$
6. $x^2 + x - 20$
7. $x^2 - 4x + 3$
8. $x^2 - x - 12$
9. $x^2 - x - 2$
10. $x^2 + 9x - 22$
11. $x^2 + 5x - 24$
12. $x^2 + 3x + 2$

13. $x^2 - 4x - 5$

14. $x^2 - x - 30$

15. $x^2 + x - 42$

16. $x^2 - x - 42$

17. $x^2 - 9x + 14$

18. $x^2 + 11x + 24$

19. $x^2 - 7x - 18$

20. $x^2 - 10x + 24$

21. $x^2 - x - 56$

Factorización por agrupamiento

Cuando un polinomio consta de cuatro términos, a veces éstos pueden factorizarse mediante un arreglo conveniente que consiste en reescribir la expresión algebraica como dos binomios agrupando adecuadamente los términos, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Factoriza completamente las expresiones siguientes.

a. $bx + by + 3x + 3y$

Solución

Observa que los primeros dos términos tienen como factor común el coeficiente literal *b*. Asimismo, los últimos dos tiene como factor común el coeficiente numérico 3.

Por ello, podemos agrupar entre paréntesis los primeros dos términos del polinomio, así como los dos últimos.

$$(bx + by) + (3x + 3y)$$
$$b(x + y) + 3(x + y)$$

Observa que $x + y$ es factor común de los términos de la expresión anterior, de manera que

$$b(x + y) + 3(x + y) = (x + y)(b + 3)$$

b. $5x^2 - 30x - x + 6$

Nota que si agrupamos los primeros dos términos del polinomio, éstos tienen como máximo factor común el monomio $5x$; luego:

$$5x^2 - 30x = 5x(x - 6)$$

De acuerdo con lo anterior, el polinomio se puede factorizar agrupando sus términos como se indica a continuación

$$(5x^2 - 30x) - (x - 6),$$

y al factorizar el primer binomio resulta

$$5x(x - 6) - (x - 6)$$

Como $(x - 6)$ es factor común de los términos del binomio anterior, entonces

$$5x^2 - 30x - x + 6 = (x - 6)(5x - 1)$$

c. $x^2 + 6x + 9 - y^2$

Observa que los primeros tres términos de la expresión anterior forman un trinomio cuadrado perfecto y que y^2 tiene raíz cuadrada perfecta; por consiguiente, para factorizar el polinomio agrupemos entre paréntesis sus primeros tres términos

$$x^2 + 6x + 9 - y^2 = (x^2 + 6x + 9) - y^2$$

de donde resulta

$$(x + 3)^2 - y^2$$

luego

$$x^2 + 6x + 9 - y^2 = [(x + 3) - y][(x + 3) + y]$$
$$x^2 + 6x + 9 - y^2 = (x - y + 3)(x + y + 3)$$

Ejercicios 5

I. *Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $nx + ny + 5x + 5y$

2. $wx - wy + 7bx - 7by$

3. $a^2 - b^2 + 2a + 2b$

7. $6x^2 - 48x - x + 8$

4. $a^2 - 2ab + b^2 - 4$

8. $2a^2 - 4ab - 3ab + 6b^2$

5. $6x + 18 + ax + 3a$

9. $2x^3 + 5x^2 - 2xy^2 - 5y^2$

6. $a^2 - b^2 - 8a - 8b$

10. $y^2 - 12x + 36 - n^4$

11. $15x^2 + 6ax + 20xb + 8ab$

15. $x^3 - y - x + x^2y$

12. $y^2 - 10y + 25 - w^6$

16. $8ax + 2a - 4bx - b$

13. $y^2 - 2y - xy + 2x$

17. $3a^2 - a + 3a - 1$

14. $15x^2 - 12x - 10x + 8$

18. $2x^2 + 8x - 5x - 20$

19. $ax^2 - a + bx^2 - b$

20. $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$

Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$, por agrupación, con a, b y c enteros y $a \neq 0$

Los siguientes son los pasos que han de seguirse para factorizar este tipo de trinomios por agrupación.

Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$, por agrupación, con a, b y c enteros y $a \neq 0$

1. Se encuentra el producto ac.
2. Se encuentran dos números cuyo producto sea ac y cuya suma sea b.
3. Con los números hallados en el paso anterior, se reescribe el término bx como la suma algebraica de dos términos cuyos coeficientes numéricos sean los números obtenidos en el segundo paso.
4. Se factoriza por agrupación.

Por último, recuerda que no todo trinomio de este tipo puede factorizarse, de forma que puedes utilizar la prueba del discriminante, si lo consideras conveniente, para comprobar si una expresión de este tipo es factorizable.

Ejemplo 8

a. Factoriza la expresión algebraica $5a^2 - 8a + 3$.

Solución

En este problema, $a = 5$, $b = -8$ y $c = 3$.

Paso 1. $ac = 5(3) = 15$

Paso 2.

		Suma de los factores
1	15	16
3	**5**	**8**
−1	−15	−16
−3	**−5**	**−8**

Paso 3. $-8a = -3a - 5a$; por tanto:

Paso 4. $5a^2 - 8a + 3 = 5a^2 - 3a - 5a + 3$
$= (5a^2 - 3a) + (-5a + 3)$
$= (5a^2 - 3a) - (5a - 3)$
$= a(5a - 3) - (5a - 3)$
$= (5a - 3)(a - 1)$

b. Factoriza el trinomio cuadrado $14n^2 - 41n + 15$.

Solución

En este trinomio, $a = 14$, $b = -41$ y $c = 15$.

Paso 1. $ac = 14(15) = 210$

Paso 2. Como ac es positivo y b es negativo, los dos números buscados son negativos.

		Suma de los factores
−1	−210	−211
−2	−105	−107
−3	−70	−73
−5	−42	−47
−6	**−35**	**−41**
−7	−30	−37
−10	−21	−31
−14	−15	−29

Paso 3. $-41n = -6n - 35n$; luego

Paso 4. $14n^2 - 6n - 35n + 15 = (14n^2 - 6n) + (-35n + 15)$
$= (14n^2 - 6n) - (35n - 15)$
$= 2n(7n - 3) - 5(7n - 3)$
$= (7n - 3)(2n - 5)$

Ejercicios 6

I. *Factoriza las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $6x^2 - 19x + 3$

2. $2y^2 + 3y - 9$

3. $2a^2 - 5a + 2$

4. $2x^2 + 5x + 3$

5. $2x^2 - x - 3$

6. $8x^2 - 2x - 3$

7. $4x^2 - 8x + 3$

8. $3x^2 - x - 10$

9. $3x^2 + 20x + 25$

10. $7x^2 - 9x + 2$

11. $6x^2 - 23x - 4$

12. $3x^2 - x - 14$

13. $5x^2 - 29x - 6$

Factorización de suma y diferencia de cubos

Consideremos el producto $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= + x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)\\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3\\ &= x^3 + y^3\end{aligned}$$

Asimismo, puede comprobarse que $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

Por tanto, para factorizar una suma de cubos en dos factores se seguirán los pasos descritos a continuación.

Factorización de suma y diferencia de cubos

1. El primer factor se construye como la suma de las raíces cúbicas de sus términos.
2. El segundo factor se construye sumando los cuadrados de dichas raíces cúbicas y a esa suma se le resta el producto de sus bases.

Ejemplo 9

Factoriza las sumas de los cubos siguientes.

a. $x^3 + 8$

Solución

a. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$
$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b. $x^3 + 64$

Solución

b. $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

c. $8x^3 + 1$

Solución

c. $8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3$
$= (2x + 1)[(2x)^2 - (2x)(1) + (1)^2]$
$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

d. $125y^3 + 27b^3$

Solución

d. $125y^3 + 27b^3 = (5y)^3 + (3b)^3$
$= (5y + 3b)[(5y)^2 - (5y)(3b) + (3b)^2]$
$= (5y + 3b)(25y^2 - 15by + 9b^2)$

La diferencia de cubos se descompone de manera análoga, sólo que:

- El primer factor se construye como la diferencia de las bases de los cubos.
- El segundo factor se construye como la suma de los cuadrados de dichas bases sumadas con su producto.

Ejemplo 10

Factoriza las diferencias de los cubos siguientes.

a. $27a^3 - 8$

Solución

$$a.\ 27a^3 - 8 = (3a)^3 - (2)^3$$
$$= (3a - 2)[(3a)^2 + 3a(2) + (2)^2]$$
$$= (3a - 2)[9a^2 + 6a + 4]$$

$b.\ 64w^3 - 125$

Solución

$$b.\ 64w^3 - 125 = (4w)^3 - (5)^3$$
$$= (4w - 5)[(4w)^2 + 4w(5) + (5)^2]$$
$$= (4w - 5)[16w^2 + 20w + 25]$$

Ejercicios 7

I. *Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $x^3 - 27$

4. $n^3 + 125$

7. $27 - 125y^6$

10. $x^3 - 64$

2. $a^3 + 64$

5. $8a^3 - 216b^3$

8. $8b^6 - 216$

11. $2w^3 + 16$

3. $1 - y^3$

6. $64y^3 - 1$

9. $27x^3 - 1$

12. $y^3 + 216$

Recomendaciones generales para la factorización de polinomios

Después de haber leído la teoría, de haber visto los procedimientos —en algunos casos, paso por paso— y de haber resuelto los ejercicios entenderás cabalmente las recomendaciones que siguen.

Recomendaciones para la factorización de polinomios

1. Determina si los términos del polinomio tienen un factor común diferente de 1; de ser así, debe extraerse.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determina si es una diferencia de cuadrados, una diferencia de cubos o una suma de cubos.
3. Si el polinomio es un trinomio cuadrado, establece si es un cuadrado perfecto.
4. Si el polinomio tiene cuatro o más términos, trata de factorizar por agrupamiento.
5. Factoriza completamente el polinomio; es decir, en caso de que se haya utilizado una técnica de factorización es preciso que revises si los factores obtenidos pueden factorizarse aún más.

Ejemplo 11

Factoriza completamente los polinomios siguientes

a. $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16)$

b. $3x^2 - 6x - 24$

c. $16a - 25a^3$

d. $a^2(x^2 - 9) - (x^2 - 9)$

Solución

a. $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16)$
$$= 3(x - 4)(x + 4)$$

b. $3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$
$$= 3(x - 4)(x + 2)$$

c. $16a - 25a^3 = a(16 - 25a^2)$
$$= a(4 - 5a)(4 + 5a)$$

d. $a^2(x^2 - 9) - (x^2 - 9) = (x^2 - 9)(a^2 - 1)$
$$= (x - 3)(x + 3)(a - 1)(a + 1)$$

Teorema del binomio

Analicemos los desarrollos binomiales siguientes:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Si n representa el exponente de cada binomio, observa lo siguiente:

- El número de términos de cada desarrollo es $n + 1$.
- Para cada término la suma de los exponentes de las partes literales a y b es n.
- El primer término de cada desarrollo es a^n.
- El último término de cada desarrollo es b^n.
- El exponente de a disminuye de uno en uno.
- El exponente de b aumenta de uno en uno.

Los coeficientes de cada uno de los términos también siguen una pauta. Para ilustrarlo mejor escribiremos los coeficientes de los desarrollos de $(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ y $(a + b)^5$ en forma triangular, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Observa en el triángulo anterior que cada número interior es la suma de los que están colocados directamente arriba de él.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Los números del último renglón son los coeficientes del desarrollo binomial $(a + b)^6$; es decir $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Utilizar el triángulo de Pascal para el desarrollo de un binomio no es práctico cuando el valor de n es grande. Afortunadamente, existe un método que nos facilita el desarrollo de expresiones de este tipo, el cual se conoce como *teorema del binomio*.

Antes de escribir la fórmula de dicho teorema explicaremos lo relacionado con los conceptos factorial y coeficientes binomiales de la forma $\binom{n}{r}$, ya que la fórmula los implica.

Factorial

Para un número natural, la operación n factorial, representada por el símbolo $n!$, se define como el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n, ambos inclusive. De acuerdo con esto

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 1 \times 2 = 2 \times 1 \\
3! &= 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 2 \times 1 \\
4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
n! &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ (1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 12

Resuelve 7!

Solución

$$7! = 7(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$$

0! por definición es igual a 1, lo cual es lo mismo que 1!; esto significa que $0! = 1$; $1! = 1$

Coeficientes binomiales

Si r y n son números enteros no negativos, donde $0 \le r \le n$, entonces el coeficiente binomial de la forma $\binom{n}{r}$ se define por la expresión

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

En los ejemplos siguientes veremos cómo evaluar coeficientes binomiales con esta fórmula.

Ejemplo 13

Evalúa los coeficientes binomiales siguientes.

a. $\binom{9}{4}$

Solución

$$\begin{aligned}\binom{9}{4} &= \frac{9!}{4!(9-4)!}\\ &= \frac{9!}{4!(5)!}\\ &= \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{4\times 3\times 2\times 1\times 5!}\\ &= 126\end{aligned}$$

b. $\binom{6}{0}$

Solución

$$\binom{6}{10} = \frac{6!}{0!(6-0)!} = \frac{6!}{1(6!)} = 1$$

En general, para todo número natural n:

$$\binom{n}{0} = 1$$

c. $\binom{8}{8}$

Solución

$$\binom{8}{8} = \frac{8!}{8!(8-8)!} = \frac{8!}{8!0!} = 1$$

El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se lee: "el número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez". Las combinaciones no son objeto de estudio en este libro; sin embargo, tienen mucha aplicación en diversas áreas de las matemáticas, como sucede en el estudio de la probabilidad.

Teorema del binomio

Teorema del binomio

Para todo n entero positivo, entonces:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Ejemplo 14

a. Utiliza el teorema del binomio para desarrollar $(3x + 2)^5$.

Solución

$$(3x+2)^5 = \binom{5}{0}(3x)^5(2)^0 + \binom{5}{1}(3x)^4(2) + \binom{5}{2}(3x)^3(2)^2 + \binom{5}{3}(3x)^2(2)^3 + \binom{5}{4}(3x)(2)^4 + \binom{5}{5}(3x)^0(2)^5$$

$$= 243x^5 + 5(81x^4)(2) + 10(27x^3)(4) + 10(9x^2)(8) + 5(3x)(16) + 32$$

$$= 243x^5 + 810x^4 + 1080x^3 + 720x^2 + 240x + 32$$

b. Aplica el teorema del binomio para desarrollar $(x - 3y)^4$.

Solución

$$(x-3y)^4 = \binom{4}{0}(x)^4(-3y)^0 + \binom{4}{1}x^3(-3y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}x(-3y)^3 + \binom{4}{4}x^0(-3y)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(-3y) + 6x^2(9y^2) + 4x(-27y^3) + 81y^4$$

$$= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$$

Uso del teorema del binomio para encontrar el r−ésimo término de un desarrollo binomial

Observa que en el desarrollo de $(a + b)^n$ el exponente de b en el r-ésimo término es $r - 1$ y el de a es $n - r + 1$.

De acuerdo con esto, el r-ésimo término del desarrollo se obtiene con la expresión

$$r\text{-ésimo término} = \binom{n}{r-1}a^{n-(r-1)}b^{r-1}$$

Ejemplo 15

a. Encuentra el cuarto término del desarrollo de $(3a - 2b)^4$.

Solución

En este caso tenemos que $n = 4$; $r = 4$; $r - 1 = 3$, y $n - (r - 1) = 1$; por tanto

$$\text{Cuarto término} = \binom{4}{3}(3a)^1(-2b)^3$$

$$\text{Cuarto término} = 4(3a)(-8b^3)$$

$$= -96ab^3$$

b. Determina el quinto término de $(x + 2y)^6$.

Solución

Aquí, $n = 6$; $r = 5$; $r - 1 = 4$, y $n - (r - 1) = 2$; por consiguiente

$$\text{Quinto término} = \binom{6}{4}(x)^2(2y)^4$$

Quinto término $= 15(x^2)(16y^4)$
$= 240x^2y^4$

c. Encuentra el término medio de $(x^2 - y^3)^{10}$.

Solución

El desarrollo consta de $n + 1$ términos; es decir, de 11; luego, el sexto término es el medio o central. Entonces tenemos que $n = 10$; $r = 6$; $r - 1 = 5$, y $n - (r - 1) = 5$; luego

Término medio $= \binom{10}{5}(x^2)^5(b^{r-1}y^3)^5$

Término medio $= -252x^{10}y^{15}$

Ejercicios 8

I. *Desarrolla cada una de las expresiones algebraicas siguientes y simplifica.*

1. $(3x + y)^4 =$

2. $(2x + y^2)^5 =$

3. $(a^2 - 2b^2)^3 =$

4. $(m - n)^6 =$

II. *Determina el término que se indica en cada uno de los desarrollos binomiales siguientes. Recuerda que*

$$r\text{-ésimo término} = \binom{n}{r-1}\left(a^{n-(r-1)}b^{r-1}\right) = \binom{n}{r-1}(a^{n-r+1})(b^{r-1})$$

5. Halla el cuarto término del desarrollo del binomio $(x + 2y)^6$

a. $160x^3y^3$
b. $150x^2y^4$
c. $120x^3y^3$
d. $160x^2y^4$
e. $160x^4y^2$

c. $120x^3y^3$

6. Halla el decimoquinto término del desarrollo del binomio $(3a + b)^{16}$.

a. $144a^3b^{11}$
b. $760a^2b^{14}$
c. $1060a^5b^{11}$
d. $1080a^2b^{14}$
e. $10\,600a^{15}b$

d. $1080a^2b^{14}$

---

7. Halla el quinto término del desarrollo del binomio $(x^2 + y^3)^{12}$.

a. $495x^{16}y^{12}$
b. $495x^4y^4$
c. $495x^6y^7$
d. $515x^{16}y^{12}$
e. $520x^{16}y^{12}$

a. $495x^{16}y^{12}$

---

8. Halla el cuarto término del desarrollo del binomio $(x^2 - 3y)^8$.

a. $1024x^{12}y^3$
b. $1644x^7y^3$
c. $-1512x^{10}y^3$
d. $1344x^8y^3$
e. $1512x^{10}y^3$

c. $-1512x^{10}y^3$

---

9. Halla el sexto término del desarrollo del binomio $(2x + y^2)^8$.

a. $450x^8y^6$
b. $525x^{10}y^3$
c. $448x^5y^3$
d. $448x^3y^{10}$
e. $448x^{10}y^3$

d. $448x^3y^{10}$

---

10. Halla el cuarto término del desarrollo del binomio $(x^2 - 3y)^7$.

a. $-945x^8y^3$
b. $-1045x^8y^3$
c. $-1045x^4y^3$
d. $-945x^8y^3$

a. $-945x^8y^3$

11. Halla el término medio del desarrollo del binomio $(x - 5y)^6$.

a. $-2400x^3y^3$
b. $2400x^3y^3$
c. $-2500x^3y^3$
d. $2500x^3y^3$
e. $-2600x^3y^3$

c. $-2500x^3y^3$

Evaluación

I. *Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes.*

1. $4n^3 - 4n$

a. $4n(n - 1)(n + 1)$
b. $4n(n - 1)(n - 1)$
c. $4n(n + 1)(n + 1)$
d. $4n(n^2 + 1)$

a. $4n(n - 1)(n + 1)$

2. $2a^2 - 12a + 18$

a. $2(a^2 - 6a + 9)$
b. $2(a + 3)^2$
c. $2(a - 3)^2$
d. $(2a + 2)(a - 9)$

c. $2(a - 3)^2$

3. $x^2 + 5x - 14$

a. $(x + 7)(x - 2)$
b. $(x - 7)(x - 2)$
c. $(x - 7)(x + 2)$
d. $(x + 7)(x + 2)$

a. $(x + 7)(x - 2)$

4. $4a^4b - 4ab$

a. $4ab\,(a^3 - 1)$
b. $4ab\,(a - 1)(a^2 - 2a + 1)$
c. $4ab\,(a - 1)(a^2 + a + 1)$
d. $4ab\,(a^2 - a + 1)$

c. $4ab\,(a - 1)(a^2 + a + 1)$

5. $a^5b - a^3b^3$
   a. $a^3b(a - b)^2$
   b. $a^3b(a + b)^2$
   c. $a^3b(a - b)(a + b)$
   d. $(a^3 - b)(a^2 - b^2)$
   e. $3x^4y(x - y)(x + y)$

c. $a^3b(a - b)(a + b)$

9. $6x^2 - 13x + 5$
   a. $(3x - 5)(2x - 1)$
   b. $(6x - 5)(x - 1)$
   c. $(6x - 1)(x - 5)$
   d. $(3x - 1)(2x - 5)$

a. $(3x - 5)(2x - 1)$

6. $3x^2 + 9x - 30$
   a. $(3x - 5)(x - 10)$
   b. $3(x - 5)(x - 2)$
   c. $3(x - 5)(x + 2)$
   d. $3(x + 5)(x - 2)$

d. $3(x + 5)(x - 2)$

10. $x^2 - 7x - 18$
   a. $(x + 9)(x - 2)$
   b. $(x - 6)(x + 3)$
   c. $(x - 9)(x + 2)$
   d. $(x + 2)(x + 9)$

c. $(x - 9)(x + 2)$

7. $4a^2 + 4ab + b^2$
   a. $(4a + b)(a + b)$
   b. $(4a - b)(a - b)$
   c. $(2a + b)(2a + b)$
   d. $(2a - b)^2$

c. $(2a + b)(2a + b)$

11. $x^2 - 9x + 18$
   a. $(x - 2)(x - 9)$
   b. $(x + 2)(x + 9)$
   c. $(x - 6)(x - 3)$
   d. $(x - 9)(x + 2)$

c. $(x - 6)(x - 3)$

8. $x^2 - 9x - 2x + 18$
   a. $(x + 2)(x - 9)$
   b. $(x + 9)(x + 2)$
   c. $(x - 2)(x - 9)$
   d. $(x + 9)(x - 2)$

c. $(x - 2)(x - 9)$

12. $3a(a - b) - (a - b)$
   a. $3a(a - b)$
   b. $(3a - 1)(a - b)$
   c. $(3a + 1)(a - b)$
   d. $3a(a + b)$

b. $(3a - 1)(a - b)$

13. Halla el undécimo término del desarrollo del binomio $(2x + y)^{12}$.

a. $284x^2y^{10}$
b. $264x^2y^{10}$
c. $270x^2y^{10}$
d. $260x^2y^{10}$

b. $264x^2y^{10}$

8

Teorema del residuo y del factor

- Teorema del residuo
- Teorema del factor
- Factorización de polimonios de tercer grado

Teorema del residuo

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$ hasta obtener un residuo en el que no aparece la literal x, el residuo resultante es igual a $P(a)$.

$P(a)$ significa el valor de $P(x)$ si $x = a$; por ejemplo, si $P(x) = 2x - 5$, entonces $P(6) = 2(6) - 5 = 7$.

Demostración

Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ y designamos con $Q(x)$ el cociente y con R el residuo, entonces $P(x) = Q(x)(x - a) + R$.

Como la igualdad anterior es válida para todo $x \in R$, lo será para $x = a$. Así, tenemos que

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R$$
$$P(a) = Q(a) \cdot 0 + R$$
$$P(a) = 0 + R$$
$$P(a) = R$$

Ejemplo 1

Halla el residuo que resulta de dividir el polinomio $P(x) = x^2 - 7x + 15$ entre $x - 4$.

Solución

De acuerdo con el teorema del residuo, $P(4)$ es igual al residuo de la división de que se trata

$$P(4) = (4)^2 - 7(4) + 15$$
$$P(4) = 16 - 28 + 15$$
$$P(4) = 3$$

El residuo de la división $\dfrac{(x^2 - 7x + 15)}{(x - 3)}$ es 3.

División sintética

Para facilitar la aplicación del teorema del residuo se utiliza un método conocido como *división sintética*, el cual se justifica cuando se compara este proceso con el de la división usual. Explicaremos este método con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Divide el polinomio $2x^3 - 7x^2 - 36x + 1$ entre $x + 3$.

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 13x + 3 \\
\hline
x+3 & 2x^3 - 7x^2 - 36x + 1 \\
 & -2x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & -13x^2 - 36x + 1 \\
 & 13x^2 + 39x \\
\hline
 & 3x + 1 \\
 & -3x - 9 \\
\hline
 & -8
\end{array}
$$

En el proceso de la división anterior, los términos $-36x$ y 1 fueron reescritos; por tanto, podemos dejar dichos términos en la primera línea y escribir por debajo de ellos los términos que se deben restar.

De este modo, la división se puede expresar de la manera siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 13x + 3 \\
\hline
x+3 & 2x^3 - 7x^2 - 36x + 1 \\
 & -2x^3 - 6x^2 + 39x - 9 \\
\hline
 & -13x^2 + 3x - 8
\end{array}
$$

Los coeficientes numéricos de los términos de la última línea son -13, 3 y -8, en ese orden. Si colocamos el primer coeficiente numérico del dividendo (2) en esta última línea, ocupando el primer lugar, tenemos 2, -13, 3 y -8.

Los primeros tres números de la lista anterior, como observarás, son los coeficientes numéricos del cociente $2x^2 - 13x + 3$ y -8 es el residuo de la división.

De acuerdo con lo anterior, podemos ahora realizar la división de esta forma

$$
\begin{array}{r|l}
x+3 & 2x^3 - 7x^2 - 36x + 1 \\
 & 6x^2 - 39x + 9 \\
 & 2x^2 - 13x + 3x - 8
\end{array}
$$

Salió el primer número de la tercera línea, los demás se obtienen por sustracción.

$$
\begin{aligned}
-7 - 6 &= -13 \\
-36 - (-39) &= 3 \\
1 - (9) &= -8
\end{aligned}
$$

Si cambiamos el 3 del divisor por -3, el signo de cada uno de los números de la segunda línea se invierte. En este caso, los números de la tercera línea se obtienen por suma. Con estos cambios, la división en la forma abreviada queda así

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\underline{-3} & 2 & -7 & -36 & 1 \\
 & & -6 & 39 & -9 \\
\hline
 & 2 & -13 & 3 & -8
\end{array}
$$

donde, como hemos señalado, el cociente de la división es el polinomio $2x^2 - 13x + 3$ y el residuo es -8.

Si el grado del dividendo es n, el del cociente es $n - 1$, siempre que el divisor sea de la forma $x - a$. Para dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - r$ usando el método de división sintética debes seguir estos pasos.

División sintética

1. Escribe en una hilera y en orden descendente los componentes de la potencia x y al final r. *Si falta una potencia, escribe en el lugar que corresponde el número cero.*
2. Escribe el primer coeficiente de la hilera anterior debajo de su posición, de manera tal que aparezca como el primer número de la tercera hilera.
3. Multiplica el primer número de la tercera hilera por r y escribe el producto debajo del segundo número de la primera hilera.
4. Suma los números de la primera y segunda hileras colocados en la segunda columna y escribe el resultado como segundo número de la tercera hilera.
5. Repite este proceso hasta completar la segunda y tercera hileras hasta el último número de la primera.
6. El último número de la tercera hilera es el residuo de la división, y los demás son los coeficientes de la potencia de x en forma descendente del cociente.

Recuerda que si el grado del polinomio es n, entonces el del cociente es $n - 1$.

Ejemplo 3

a. Divide $10 - 4x^2 + 3x^3 - 12x$ entre $x - 2$.

Solución

Al ordenar el polinomio queda: $3x^3 - 4x^2 - 12x + 10$.

Como $x - r = x - 2$, entonces $r = 2$. Así, tenemos que

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -4 & -12 & +10 & \underline{2} \\ & +6 & +4 & -16 & \\ \hline 3 & +2 & -8 & -6 & \end{array}$$

Nota: $10 = 10x^0$

El cociente de la división es $3x^2 + 2x - 8$ y el residuo es -6.

b. Divide $4x^4 - 40x^2 - 5x + 25$ entre $x + 3$ por el método de división sintética.

Solución

En este caso, $x - r = x + 3$; luego, $r = -3$

En este ejemplo, el dividendo no tiene término en x con potencia 3; por consiguiente, dicha expresión se debe reescribir como sigue

$$4x^4 + 0x^3 - 40x^2 - 5x + 25$$

Luego, tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +0 & -40 & -5 & +25 & \underline{-3} \\ & -12 & +36 & +12 & -21 & \\ \hline 4 & -12 & -4 & +7 & +4 & \end{array}$$

De acuerdo con lo anterior, el resultado de la división entre dichos polinomios es:

cociente $4x^3 - 12x^2 - 4x + 7$ y residuo 4

c. Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 8x + x^3 - 50$, calcula $P(-4)$ aplicando la división sintética.

Solución

De acuerdo con el teorema del residuo, $P(-4)$ es el residuo que resulta de dividir $5x^2 - 8x + x^3 - 50$ entre $x + 4$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +5 & -8 & -50 & \underline{-4} \\ & -4 & -4 & +48 & \\ \hline 1 & +1 & -12 & -2 & \end{array}$$

$$P(-4) = -2$$

Comprobación

Recuerda que $P(-4)$ significa el valor de $P(x)$ si $x = 4$

$$\begin{aligned} P(-4) &= 5(-4)^2 - 8(-4) + (-4)^3 - 50 \\ &= 5(16) + 32 - 64 - 50 \\ &= 80 + 32 - 114 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Teorema del factor

Si $x = a$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio, entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$; recíprocamente, si $x - a$ es un factor de $P(x)$, entonces $x = a$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$.

Demostración

Sea $P(x) = (x - a)Q(x) + R$, donde $Q(x)$ es el cociente que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ y R es el residuo de dicha división. Entonces, de acuerdo con el teorema del residuo, $R = P(a)$; por consiguiente, $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$.

Como $x = a$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, entonces $P(a) = 0$; por tanto $P(x) = (x - a)Q(x)$, o sea que $P(x)$ tiene la expresión $(x - a)$ como factor.

Del mismo modo, como $(x - a)$ es un factor de $P(x)$, ello implica que $R = 0$, y entonces $P(x) = (x - a)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio. Como esta igualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$, lo será para $x = a$.

Luego

$$\begin{aligned} P(a) &= (a - a)Q(x) \\ P(a) &= 0 \cdot Q(x) \\ P(a) &= 0 \end{aligned}$$

$x = a$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$

$(x - a)$ es un factor de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$

a es una raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$

Por ejemplo, para determinar si $x + 3$ es un factor de $P(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ basta verificar si $x = -3$ es raíz de esa ecuación, es decir, comprobar que $P(-3) = 0$.

Al sustituir $x = -3$ en la ecuación resulta:

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3 + (-3)^2 - 7(-3) - 3 \\ &= -27 + 9 + 21 - 3 \\ &= -30 + 30 = 0 \end{aligned}$$

Así, $x + 3$ es un factor de $P(x)$.

Podemos utilizar la división sintética para evaluar $P(-3)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +1 & -7 & -3 & \underline{-3} \\ & -3 & +6 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & +0 & \end{array}$$

El residuo es 0; por tanto, se prueba que $x + 3$ es un factor de $P(x)$.

Por último, si quisiéramos obtener un polinomio de tercer grado que tenga como raíces $x = 2$, $x = 1$ y $x = -3$, bastaría escribir $P(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)$.

Ejemplo 4

a. Determina si $(x - 3)$ es un factor el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$.

Solución

$(x - 3)$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$ si $P(3) = 0$; por consiguiente, encontraremos dicho valor por el método de división sintética

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +3 & -23 & -12 & \underline{3} \\ & +6 & +27 & +12 & \\ \hline 2 & +9 & +4 & 0 & \end{array}$$

Así, $P(3) = 0$; por consiguiente, $(x - 3)$ es un factor de $P(x)$.

b. Determina si $x + 2$ es un factor de $P(x) = 5x^3 - 6x + 4x^2 - 12$.

Solución

Si $P(-2) = 0$, entonces $(x + 2)$ es un factor de $P(x)$. Indaguemos por división sintética si se cumple lo anterior

$$\begin{array}{rrrr|l} 5 & +4 & -6 & -12 & \underline{-2} \\ & -10 & +12 & -12 & \\ \hline 5 & -6 & +6 & -24 & \end{array}$$

Como $P(-2) = -24$, entonces $x + 2$ no es un factor de $P(x) = 5x^3 - 6x + 4x^2 - 12$.

Factorización de polinomios de tercer grado

Para factorizar polinomios de grado superior se utilizan el teorema del residuo y el teorema del factor.

Si deseas factorizar un polinomio $P(x)$ de tercer grado, supondremos un binomio de la forma $x - r$, donde r es un divisor del término independiente, y luego comprobaremos por medio del teorema del residuo si dicho binomio es un factor de $P(x)$; es decir, si $P(r) = 0$. En caso de que $x - r$ no sea factor, supondremos otra expresión con otro divisor del término independiente hasta que se encuentre un factor de $P(x)$.

Una vez obtenido un factor, podemos proceder de igual manera para encontrar los otros, o bien reescribir el polinomio $P(x)$ como el producto del factor ya obtenido por otro polinomio que hay que factorizar y ver si para hacerlo se pueden utilizar algunas técnicas ya conocidas.

Ejemplo 5

Determina los factores de $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$.

Solución

Podemos observar que los factores de este polinomio son de la forma $(x + a)(x + b)(x + c)$, donde a, b y c son constantes y donde el producto abc es -12; por consiguiente, los factores de -12 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12, que son los posibles valores de a, b y c que hacen que $P(x) = 0$.

Si seleccionamos el número -1 y resulta que $P(-1) = 0$, entonces $(x + 1)$ es un factor de $P(x)$.

Veamos si esto se cumple

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -8 & 19 & -12 & \underline{-1} \\ & -1 & 9 & -28 & \\ \hline 1 & -9 & 28 & -40 & \end{array}$$

Como $P(-1) = -40 \neq 0$, entonces $x + 1$ no es un factor de $P(x)$.

Si seleccionamos el número 1 y resulta que es $P(1) = 0$, entonces $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -8 & 19 & -12 & \underline{1} \\ & 1 & -7 & 12 & \\ \hline 1 & -7 & 12 & 0 & \end{array}$$

Como $P(1) = 0$, entonces $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$.

De acuerdo con lo anterior, podemos reescribir $P(x)$ como sigue

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 7x + 12)$$

de donde al factorizar $x^2 - 7x + 12$ resulta

$$P(x) = (x - 1)(x - 4)(x - 3)$$

Ejercicios 1

I. *Efectúa las divisiones siguientes por el método de división sintética. (Elige la opción correcta.)*

1. $(x^3 + 8x^2 + 6x + 1) \div (x + 5)$

a. Cociente: $x^2 + 3x - 9$; residuo: 46
b. Cociente: $x^2 + 3x - 7$; residuo: 40
c. Cociente: $x^2 - 3x - 9$; residuo: 45
d. Cociente: $x^2 + 3x + 9$; residuo: -44

a. Cociente: $x^2 + 3x - 9$; residuo: 46

2. $(-45x - 2 + x^3) \div (x + 7)$

a. Cociente: $x^2 - 7x + 4$; residuo: 30
b. Cociente: $x^2 - 7x + 4$; residuo: 26
c. Cociente: $x^2 + 7x + 4$; residuo: -28
d. cociente: $x^2 - 7x + 4$; residuo: -30

d. cociente: $x^2 - 7x + 4$; residuo: -30

3. $(5x^2 - 3x^3 + x^4 - 10x + 11) \div (x - 2)$

a. Cociente: $x^3 - x^2 + 5x - 7$; residuo: 2
b. Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$; residuo: 3
c. Cociente: $x^3 - x^2 + 3x + 4$; residuo: 19
d. Cociente: $x^3 + x^2 - 3x - 7$; residuo: 5

b. Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$; residuo: 3

4. $(x^3 - 64) \div (x - 4)$

a. Cociente: $x^2 + 4x - 16$; residuo: 0
b. Cociente: $x^2 - 4x + 16$; residuo: 0
c. Cociente: $x^2 + 4x + 32$; residuo: 0
d. cociente: $x^2 + 4x + 16$; residuo: 0

d. cociente: $x^2 + 4x + 16$; residuo: 0

5. $(-7x + 5x^2 + 2x^3 + 6) \div (x + 4)$

a. cociente: $2x^2 + 5x - 7$; residuo: 16
b. cociente: $2x^2 - 3x + 10$; residuo: -12
c. cociente: $2x^2 - 3x + 5$; residuo: -14
d. cociente: $2x^3 + 3x + 5$; residuo: -16

c. cociente: $2x^2 - 3x + 5$; residuo: -14

II. *Evalúa las funciones polinomiales siguientes usando la división sintética y el teorema del residuo.*

6. Dado $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, evalúa $f(-2)$.

a. 24
b. 21
c. 25
d. 19
e. -21

b. 21

---

7. Dado $f(x) = -x^2 + 7x - 6$, evalúa $f(4)$.

a. -10
b. -6
c. 10
d. 6
e. 3

d. 6

---

8. Dado $f(x) = 5x^2 - 7x - 1$, evalúa $f(-2)$.

a. 33
b. -33
c. -13
d. 13
e. -23

a. 33

---

9. Dado $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 1$, evalúa $f(3)$.

a. 30
b. -40
c. -47
d. $+45$
e. 47

e. 47

---

10. Dado $f(x) = -2x^3 + 9x - 31$, evalúa $f(-3)$.
   a. -4
   b. 4
   c. -5
   d. 5
   e. -3

a. -4

III. *En cada uno de los ejercicios siguientes, utiliza el teorema del factor, el teorema del residuo y la división sintética para determinar si el binomio dado es un factor del polinomio $f(x)$ que se indica.*

11. $x + 3; f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$
   a. $(x + 3)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x + 3)$ no es factor de $f(x)$

a. $(x + 3)$ es factor de $f(x)$

---

12. $x + 1; f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$
   a. $(x + 1)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x + 1)$ no es factor de $f(x)$

b. $(x + 1)$ no es factor de $f(x)$

---

13. $x - 2; f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
   a. $(x - 2)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x - 2)$ no es factor de $f(x)$

a. $(x - 2)$ es factor de $f(x)$

---

14. $x - 2; f(x) = x^3 - 19x + 30$
   a. $(x - 2)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x - 2)$ no es factor de $f(x)$

a. $(x - 2)$ es factor de $f(x)$

---

15. $x + 5; f(x) = x^4 - 5x^3 - x + 5$
   a. $(x + 5)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x + 5)$ no es factor de $f(x)$

b. $(x + 5)$ no es factor de $f(x)$

---

16. $x - 4; f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 2x - 12$
   a. $(x - 4)$ es factor de $f(x)$
   b. $(x - 4)$ no es factor de $f(x)$

b. $(x - 4)$ no es factor de $f(x)$

IV. *Factoriza las expresiones algebraicas siguientes.*

17. $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

a. $(x + 2)(x + 5)(x - 1)$
b. $(x + 1)(x + 2)(x - 5)$
c. $(x + 1)(x + 2)(x + 5)$
d. $(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

d. $(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

18. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

a. $(x + 5)(x - 1)(x - 2)$
b. $(x + 1)(x + 2)(x - 5)$
c. $(x + 2)(x + 5)(x - 1)$
d. $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$

d. $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$

19. $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

a. $(x + 1)(x - 3)(x - 4)$
b. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$
c. $(x + 3)(x - 1)(x - 4)$
d. $(x + 1)(x + 3)(x + 4)$

b. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$

20. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

a. $(x + 2)(x - 2)(x - 3)$
b. $(x + 1)(x - 3)(x - 4)$
c. $(x + 2)(x + 3)(x - 2)$
d. $(x + 3)(x + 2)(x - 3)$

a. $(x + 2)(x - 2)(x - 3)$

Evaluación

I. *Resuelve los ejercicios siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. Dada $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 7x + 20$, halla $f(-2)$.

a. 4
b. −6
c. 6
d. −14
e. 7
f. −5

d. −14

2. Efectúa esta división por el método de división sintética:

$$(3x^3 + 2 - 5x + 2x^2) \div (x + 1).$$

a. Cociente: $3x^2 - x - 4$; residuo: 6
b. Cociente: $3x^2 + x - 5$; residuo: −4
c. Cociente: $3x^2 - x + 7$; residuo: −6
d. Cociente: $3x^2 - 2x + 7$; residuo: 0
e. Cociente: $3x^2 + 2x - 1$; residuo: −4

a. Cociente: $3x^2 - x - 4$; residuo: 6

3. Determina si $(x + 3)$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$.

a. Sí es factor
b. No es factor

4. Determina para qué valor de la constante k, $(x - 3)$ es un factor de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x + k$.

a. 7
b. -12
c. 12
d. -7
e. -14

b. -12

II. *Dado el polinomio* $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$, *contesta las preguntas 5 a 9. (Elige la opción correcta.)*

5. Determina el cociente que resulta de dividir dicho polinomio entre $x + 3$. Utiliza la división sintética.

a. $x^2 - 7x + 3$
b. $x^2 + 5x - 6$
c. $x^2 - 5x + 3$
d. $x^2 - 5x + 2$
e. $x^2 + 5x - 4$

d. $x^2 - 5x + 2$

---

6. Determina el residuo que resulta de la división anterior.

a. -16
b. 10
c. -18
d. -10
e. 16

a. -16

---

7. Halla $P(-2)$ por división sintética.

a. 5
b. -3
c. -5
d. 0

d. 0

---

8. Determina si $x + 2$ es un factor de $P(x)$.

a. Sí
b. No

---

9. Determina si $x - 5$ es un factor de $P(x)$.

a. Sí
b. No

---

10. Determina si $x = 4$ es un cero del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + 12x - 16$.

a. Sí es un cero
b. No es un cero

11. Determina si $x = -4$ es un cero del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + 12x - 16$.

a. Sí es un cero
b. No es un cero

12. Halla los ceros del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40$.

a. -4, -5 y 2
b. -1, -8 y 5
c. -2, -4 y 5
d. -2, -5 y 4
e. -2, -4 y -5

c. -2, -4 y 5

9

Expresiones racionales

Fracciones algebraicas

Una expresión racional, llamada también *fracción algebraica,* es la que puede expresarse en la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son polinomios y q es diferente de cero. Los siguientes son algunos ejemplos

$$\frac{6x-5}{x^2-9},\quad \frac{x^3-8}{x^2-7x+6}\quad \text{etcétera}$$

Para fines del estudio de este tipo de expresiones, cuando escribamos en este texto fracciones algebraicas supondremos que sus denominadores no son nulos; es decir, que las literales que aparecen en un denominador no pueden tomar valores que al sustituirse en una expresión hagan que su valor sea cero.

Por ejemplo, al tener

a. $\frac{7}{x}$, supondremos que $x \neq 0$.

b. $\frac{7x-3}{x-5}$, supondremos que $x \neq 5$.

c. $\frac{x+6}{x+1}$, supondremos que $x \neq -1$.

d. $\frac{x+9}{x^2-4}$, supondremos que $x \neq 2$ y $x \neq -2$.

Signos de una fracción algebraica

En una fracción algebraica se deben considerar tres signos: el del numerador, el del denominador y el de la fracción misma.

El signo de la fracción es el símbolo $+$ o $-$ que precede a la raya de la fracción. Cuando delante de ella no aparece ningún signo de éstos, se sobreentiende que es positivo $(+)$.

En la fracción $\frac{-x}{y}$ el signo del denominador es $+$, el del numerador es $-$ y el de la fracción es $-$.

Asimismo, en la fracción $\frac{-x}{-y}$ los signos del numerador y del denominador son, respectivamente, $-$ y el de la fracción es $+$; es decir, $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$

Por último, en la fracción $\frac{x}{-y}$ el signo del numerador es $+$, el del denominador $-$ y el de la fracción $-$.

En general, si z representa el cociente que resulta al dividir x entre y, entonces tenemos las siguientes reglas de los signos.

Reglas de los signos para cocientes en expresiones fraccionarias

1. $\dfrac{x}{y} = z$
2. $\dfrac{-x}{-y} = z$
3. $\dfrac{-x}{y} = -z$
4. $\dfrac{x}{-y} = -z$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la igualdad que corresponde a la regla 3 de los signos resulta:

$$(-1)\left(\frac{-x}{y}\right) = -z(-1) = z, \quad \text{o sea}$$

5. $-\left(\dfrac{-x}{y}\right) = z$

Además, al multiplicar por -1 ambos miembros de la igualdad que corresponde a la regla 4 de los signos resulta:

$$(-1)\left(\frac{x}{-y}\right) = -z(-1) = z, \quad \text{es decir}$$

6. $-\left(\dfrac{x}{-y}\right) = z$

De las reglas de los signos anteriores podemos concluir lo siguiente

$$\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y} = -\frac{-x}{y} = -\frac{x}{-y}$$

Asimismo

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$$

Propiedades de las fracciones algebraicas

Las propiedades de las fracciones aritméticas se aplican igualmente a las algebraicas, en virtud de que éstas representan números reales.

Dichas propiedades son

1. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan dos fracciones algebraicas, entonces éstas son equivalentes si $ad = bc$.

2. Si tanto el numerador como el denominador de una fracción algebraica se multiplican por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene otra fracción equivalente a ella; así

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \quad \text{donde } k \neq 0$$

3. Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se dividen entre una misma cantidad diferente de cero, se obtiene otra equivalente a ella, es decir

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\frac{ka}{k}}{\frac{kb}{k}} = \frac{a}{b}, \quad \text{donde } k \text{ y } b \text{ son } \neq 0$$

4. El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores de ambas y cuyo denominador es el producto de los denominadores, esto es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

5. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones algebraicas, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

6. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

7. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica está simplificada cuando se expresa en sus términos mínimos; es decir, cuando su numerador y denominador sólo tienen como factor común el 1 o el -1.

Para simplificar una fracción algebraica se cancelan los factores comunes a su numerador y denominador, esto con base en la siguiente propiedad de los números racionales:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad \text{donde } k \text{ y } b \text{ son diferentes de cero}$$

Esta propiedad indica que dada una fracción hay que factorizar completamente tanto el numerador como el denominador y cancelar los factores comunes a ambos, si los hubiere, para que quede simplificada, es decir, expresada en sus términos mínimos.

Ejemplo 1

a. Simplifica la fracción $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16}$

Solución

Observa que en esta fracción el numerador y el denominador son expresiones algebraicas que pueden factorizarse. Por tanto, para simplificarla primero factorizamos sus términos y después cancelamos los factores comunes a ellos, de este modo

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16} = \frac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \frac{x-3}{x+4}$$

Por tanto

$$\frac{x^2 - 7 + 12}{x^2 - 16} = \frac{x - 3}{x + 4}$$

b. Simplifica la fracción $\frac{5x - 20}{x^2 - 4x}$

Solución

Al factorizar los términos de la fracción algebraica anterior resulta

$$\frac{5x - 20}{x^2 - 4x} = \frac{5\cancel{(x-4)}}{x\cancel{(x-4)}} = \frac{5}{x}$$

Por consiguiente

$$\frac{5x - 20}{x^2 - 4x} = \frac{5}{x}$$

c) Simplifica $\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 25}{2x + 2y - 10}$

Solución

Observa que en la expresión algebraica que corresponde al numerador, los primeros tres términos forman un trinomio cuadrado perfecto; luego, al factorizarla por agrupaciones resulta

$$\begin{aligned}(x^2 + 2xy + y^2) - 25 &= (x + y)^2 - 25 \\ &= (x + y - 5)(x + y + 5)\end{aligned}$$

Asimismo, en la expresión algebraica que corresponde al denominador de la fracción, el número 2 es el MFC de sus términos; luego

$$2x + 2y - 10 = 2(x + y - 5)$$

De acuerdo con lo anterior

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 25}{2x + 2y - 10} = \frac{(x + y - 5)(x + y + 5)}{2(x + y - 5)} = \frac{x + y + 5}{2}$$

d. Simplifica $\frac{x^3 - 64}{x^3 + 4x^2 + 16x}$

Solución

La expresión que corresponde al numerador de la fracción es una diferencia de cubos y la que corresponde al denominador, su MFC, es x; así, al factorizar resulta

$$\frac{x^3 - 64}{x^3 + 4x - 16x} = \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)}{x(x^2 + 4x + 16)} = \frac{x - 4}{x}$$

e. Simplifica $\frac{2x - 2y}{2y - 2x}$

Solución

Al factorizar los términos de la fracción anterior resulta

$$\frac{\cancel{2}(x - y)}{\cancel{2}(y - x)} = \frac{x - y}{y - x}$$

Podemos reescribir la expresión del denominador, $y - x$, como sigue:

$$y - x = -(x - y), \quad \text{o sea}$$

$$\frac{x - y}{y - x} = \frac{(x - y)}{-(x - y)} = -1$$

En general

$$\frac{a - b}{b - a} = -1$$

Ejercicios 1

I. *Simplifica las fracciones algebraicas siguientes.*

1. $\dfrac{40x^2y^5c}{48x^3y^2c}$

2. $\dfrac{-21xb^5c^3}{-63x^3b^2c^3d}$

3. $\dfrac{28a^5b^7c}{-21a^6b^8}$

4. $\dfrac{-30m^2n^4x^2}{-45m^3n^7x}$

5. $\dfrac{x^2-4}{3x+6}$

$\dfrac{x-2}{3}$

6. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}$

$\dfrac{x+1}{x+4}$

7. $\dfrac{nx+ny+mx+my}{n^2-m^2}$

$\dfrac{x+y}{n-m}$

8. $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-25}$

$\dfrac{x-4}{x-5}$

9. $\dfrac{4b-2a}{12b-6a}$

$\dfrac{1}{3}$

13. $\dfrac{x^3+27}{x^2-3x+9}$

$x+3$

10. $\dfrac{4a-4b}{8b-8a}$

$\dfrac{-1}{2}$

14. $\dfrac{ax-ay}{x^2-y^2}$

11. $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

$\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

15. $\dfrac{x^2-9}{4ax-12a}$

12. $\dfrac{a^2-a-20}{a^2+a-30}$

$\dfrac{a+4}{a+b}$

16. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-125}$

17. $\dfrac{x^2-2x-3}{ax+a}$

20. $\dfrac{x^2-25}{x^2-9x+20}$

18. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x-18}$

21. $\dfrac{2x^2-7x}{4x^2-49}$

$\dfrac{x}{2x+7}$

19. $\dfrac{x^2+5x}{x^2+10x+25}$

$\dfrac{x}{x+5}$

22. $\dfrac{n^2-m^2}{n^2-2mn+m^2}$

$\dfrac{n+m}{n-m}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Como hemos dicho, el producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ b \text{ y } d\neq 0$$

Hay que tener presente que la expresión racional que resulta al multiplicar dos o más fracciones algebraicas siempre debe escribirse en forma simplificada.

Ejemplo 2

Efectúa estas multiplicaciones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a. $\dfrac{y^2-4}{y^2-49}\cdot\dfrac{2y+14}{4y+8}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{y^2-4}{y^2-49}\cdot\frac{2y+14}{4y+8} &= \frac{(y^2-4)(2y+14)}{(y^2-49)(4y+8)}\\ &= \frac{(y-2)(y+2)2(y+7)}{(y+7)(y-7)4(y-2)}\\ &= \frac{2(y-2)}{4(y-7)}\\ &= \frac{y-2}{2(y-7)};\ \text{o también}\\ &= \frac{y-2}{2y-14}\end{aligned}$$

b. $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-49}\cdot\dfrac{3x-21}{6x-18}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x-21}{x^2-49}\cdot\frac{3x-21}{6x-18} &= \frac{(x^2+4x-21)(3x-21)}{(x^2-49)(6x-18)}\\ &= \frac{\cancel{(x+7)}\,\cancel{(x-3)}\,3\,\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}\,\cancel{(x+7)}\,6\,\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejercicios 2

I. *Efectúa las multiplicaciones de estas fracciones algebraicas y simplifica el resultado.*

1. $\dfrac{2x+4}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{4x+8}$

$\dfrac{x-y}{2}$

3. $\dfrac{7a+7b}{14a^2}\cdot\dfrac{a^2-ab}{a^2-b^2}$

$\dfrac{1}{2a}$

2. $\dfrac{y^2+8y+15}{y^2-25}\cdot\dfrac{4y-20}{y^2+3y}$

$\dfrac{4}{y}$

4. $\dfrac{y^3+y^2}{y^2-1}\cdot\dfrac{4y^2-4y}{y^5}$

$\dfrac{4}{y^2}$

5. $\frac{a^2-4}{5a-10}\cdot\frac{7a-14}{7a+14}$

$\frac{a-2}{5}$

9. $\frac{x^2-9}{2x^2+2x}\cdot\frac{4x-4}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+x}{3x-9}$

$\frac{2}{3}$

6. $\frac{y^2-9y+20}{25-y^2}\cdot\frac{y^2+5y}{y^2-4y}$

-1

10. $\frac{a^2+6a}{5a-30}\cdot\frac{a^2-36}{a^2+12a+36}$

$\frac{a}{5}$

7. $\frac{x^2+7x}{2x-6}\cdot\frac{x^2-10x+21}{x^2-49}$

$\frac{x}{2}$

11. $\frac{x(x+3)-y(x+3)}{x^2-y^2}\cdot\frac{3x+3y}{2x+6}$

$\frac{3}{2}$

8. $\frac{x^2+3x-bx-3b}{x^2-b^2}\cdot\frac{nx+nb}{4x+12}$

$\frac{n}{4}$

12. $\frac{x^2+11x+18}{x^2+2x}\cdot\frac{x^2-9x}{x^2-81}$

1

División de fracciones algebraicas

Como hemos señalado, la operación de dividir una fracción entre otra consiste en multiplicar la fracción que corresponde al dividendo por el inverso multiplicativo de la que corresponde al divisor; es decir

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 3

Haz las divisiones de fracciones siguientes y simplifica el resultado.

a. $\dfrac{a^2 + a}{x^2} \div \dfrac{1 - a^2}{ax^2 - x^2}$

Solución

$$\frac{a^2 + a}{x^2} \div \frac{1 - a^2}{ax^2 - x^2} = \frac{a^2 + a}{x^2} \cdot \frac{ax^2 - x^2}{1 - a^2} = \frac{(a^2 + a)(ax^2 - x^2)}{x^2(1 - a^2)}$$

Ahora factoricemos completamente los términos de la fracción anterior

$$= \frac{a(a+1)x^2(a-1)}{x^2(1-a)(1+a)}$$

$$= \frac{a\cancel{x^2}\,\cancel{(1+a)}(a-1)}{\cancel{x^2}\,\cancel{(1+a)}(1-a)}$$

$$= \frac{a(a-1)}{1-a} = a(-1)$$

$$= -a$$

Por tanto

$$\frac{a^2 + a}{x^2} \div \frac{1 - a^2}{ax^2 - x^2} = -a$$

b. $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{5x - 20} \div \dfrac{x^2 - 4}{10x - 5x^2}$

Solución

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{5x - 20} \div \frac{x^2 - 4}{10x - 5x^2} = \frac{(x^2 - 2x - 8)(10x - 5x^2)}{(5x - 20)(x^2 - 4)}$$

de donde al factorizar y simplificar resulta

$$\frac{(x-4)(x+2)5x(2-x)}{5(x-4)(x-2)(x+2)} = x(-1) = -x$$

Por ende

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{5x - 20} \div \frac{x^2 - 4}{10x - 5^2} = -x$$

Ejercicios 3

I. *Efectúa las siguientes divisiones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.*

1. $\dfrac{2y-14}{y^2-2y-35} \div \dfrac{6y-30}{y^2-25}$

   $\dfrac{1}{3}$

2. $\dfrac{9x-27}{15x+30} \div \dfrac{6x^2-18x}{14-7x}$

   $\dfrac{-7}{10x}$

3. $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+5x} \div \dfrac{x^2-4}{2x}$

   $\dfrac{2}{x-2}$

4. $\dfrac{a^2+6a+8}{a^2+4a} \div \dfrac{4-a^2}{2a}$

   $\dfrac{2}{2-a}$

5. $\dfrac{b^2-2b-8}{4b-b^2} \div \dfrac{4-b^2}{5b-10}$

   $\dfrac{5}{b}$

6. $\dfrac{x^3+8}{x^2-4} \div \dfrac{x^3-2x^2+4x}{2a-ax}$

   $\dfrac{-a}{x}$

7. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^3+27} \div \dfrac{x^2-7x}{x^3y-3x^2y+9xy}$

   y

8. $\dfrac{n^2-9}{n^3-27} \div \dfrac{2n^3+6n^2}{n^3+3n^2+9n}$

   $\dfrac{1}{2n}$

9. $\dfrac{x^2 - x - 20}{2x + 10} \div \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$

$\dfrac{x - 5}{2}$

10. $\dfrac{x^2 - 7x}{x^2 - 5x + 6} \div \dfrac{2x^2 - 14x}{2x^2 - 8}$

$\dfrac{x + 2}{x - 3}$

11. $\dfrac{w^2 - w}{w^2} \div \dfrac{w^2 - 1}{w + 1}$

$\dfrac{1}{w}$

12. $\dfrac{b^2 + 4b - 45}{4b - 20} \div \dfrac{b^2 - 81}{b^2 - 18b + 81}$

$\dfrac{b - 9}{4}$

Suma y resta de fracciones algebraicas

En esta sección estudiaremos primero la suma y resta de fracciones algebraicas homogéneas y luego la suma y resta de fracciones heterogéneas.

Suma y resta de fracciones homogéneas

En principio, cabe recordar que cuando dos o más fracciones tienen el mismo denominador son *homogéneas*. Por ejemplo

$$\tfrac{3}{5} \quad \text{y} \quad \tfrac{7}{5}$$

$$\tfrac{3}{4x - y} \quad \text{y} \quad \tfrac{7}{4x - y}$$

Para sumar o restar fracciones homogéneas se suman o restan sus numeradores y el resultado se divide entre el denominador común, para luego reducir la expresión en caso de que sea posible.

Ejemplo 4 Haz las operacioens siguientes

a. $\dfrac{4}{3x} + \dfrac{8}{3x}$ *b.* $\dfrac{6x}{x - y} - \dfrac{6y}{x - y}$ *c.* $\dfrac{x}{x^2 - 9} + \dfrac{3}{x^2 - 9}$

Solución

a. $\dfrac{4}{3x} + \dfrac{8}{3x} = \dfrac{4 + 8}{3x} = \dfrac{12}{3x} = \dfrac{4}{x}$

b. $\dfrac{6x}{x - y} - \dfrac{6y}{x - y} = \dfrac{6x - 6y}{x - y} = \dfrac{6(x - y)}{(x - y)} = 6$

c. $\dfrac{x}{x^2 - 9} + \dfrac{3}{x^2 - 9} = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{1}{x - 3}$

Suma y resta de fracciones heterogéneas

Recuerda que dos o más fracciones son heterogéneas cuando no tienen el mismo denominador.

Para sumar o restar dos o más fracciones heterogéneas se multiplica el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios a fin de obtener fracciones equivalentes a las originales y que, a la vez, sean homogéneas todas entre sí.

Antes de efectuar las multiplicaciones señaladas es conveniente factorizar los denominadores, en caso de que sea posible, para tener mayor claridad en cuanto a las operaciones por realizar. Una vez que las operaciones indicadas queden como sumas o restas de fracciones homogéneas se procede a realizarlas como ya se señaló.

Ejemplo 5

Haz las sumas y restas de fracciones que se indican.

a. $\frac{5}{x} + \frac{2}{3}$

Solución

Para obtener la homogeneidad de las fracciones se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{5}{x}$; análogamente, se multiplican por x el numerador y el denominador de la fracción $\frac{2}{3}$. A continuación se suman los numeradores y el resultado se divide entre el común denominador. Así

$$\frac{5}{x} + \frac{2}{3} = \frac{5}{x}\left[\frac{3}{3}\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{x}{x}\right]$$
$$= \frac{15}{3x} + \frac{2x}{3x}$$
$$= \frac{15 + 2x}{3x}$$

b. $\frac{6}{4x} - \frac{7}{8x^2}$

Solución

Como $8x^2$ es divisible entre $4x$ (ya que, $\frac{8x^2}{4x} = 2x$), basta multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $\frac{6}{4x}$ por $2x$ para obtener una fracción equivalente que, además, es homogénea a la fracción $\frac{7}{8x^2}$. Así

$$\left(\frac{2x}{2x}\right)\frac{6}{4x} - \frac{7}{8x^2} =$$
$$= \frac{12x}{8x^2} - \frac{7}{8x^2}$$
$$= \frac{12x - 7}{8x^2}$$

c. $\frac{21x}{x^2 - 3x - 10} - \frac{15}{x - 5}$

Solución

Al factorizar $x^2 - 3x - 10$ resulta $\frac{21x}{(x-5)(x+2)} - \frac{15}{x-5}$. Observa que para obtener la diferencia de dos fracciones homogéneas se requiere multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $\frac{15}{x-5}$ por $(x + 2)$; luego

$$= \frac{21x}{(x-5)(x+2)} - \frac{15(x+2)}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \frac{21x - 15(x+2)}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \frac{21x - 15x - 30}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \frac{6x - 30}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \frac{6\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+2)} = \frac{6}{x+2}$$

d. $\dfrac{7}{x+2} - \dfrac{3}{x^2-4}$

Solución

Al descomponer en factores $x^2 - 4$ resulta $\frac{7}{x+2} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}$. En esta expresión se observa que para obtener dos fracciones homogéneas es necesario multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $\frac{7}{x+2}$ por $(x - 2)$; luego

$$\frac{7}{(x+2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} - \frac{3}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{3}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{7(x+2) - 3}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{7x - 14 - 3}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{7x - 17}{(x+2)(x-2)}$$

Otra forma de homogeneizar fracciones heterogéneas consiste en multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente que resulta al dividir el mínimo común denominador (MCD) de las fracciones entre el denominador de cada fracción.

Recuerda que el mínimo común denominador de un conjunto de fracciones es el mínimo común múltiplo de todos sus denominadores y para determinarlo se multiplican todos los distintos factores de los denominadores afectados por su máxima potencia.

En seguida veremos algunos ejemplos de cómo determinar el MCD de un conjunto de polinomios.

Ejemplo 6 Determina el mínimo común múltiplo (MCM) de los polinomios que se indican.

a. x, x^2 y $2x^3$

Solución

Los distintos factores de los polinomios son x y 2, donde la máxima potencia de la x es 3 y la de 2 es 1; por tanto, el MCM de los polinomios es $2x^3$.

b. $a - b$; $a^2 - 2ab + b^2$

Solución

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

El único factor que aparece en los polinomios es $(a - b)$, cuya máxima potencia es 2; luego, su MCM es $(a - b)^2$.

c. $8b$, $4b^2$

Solución

Como $8 = (2)^3$, entonces los diferentes factores de los polinomios son 2 y b, donde sus máximas potencias son 2 y 3, respectivamente. Por consiguiente, el MCM de los dos monomios es $(2)^3b^2 = 8b^2$.

d. $x - 7$, $x^2 - 49$, $x + 2$

Solución

$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$; así, los distintos factores de los polinomio son $(x - 7)$, $(x + 7)$ y $x + 2$; por tanto, el MCM es $(x - 7)(x + 7)(x + 2)$.

Veamos a continuación algunos ejemplos de suma y resta de fracciones utilizando el mínimo común denominador para homogeneizar las fracciones y luego efectuar la operación indicada.

Ejemplo 7

Haz las operaciones indicadas y simplifica.

a. $\dfrac{9}{3x} - \dfrac{5}{12x^2}$

Solución

$12 = 4 \times 3$; luego, los distintos factores de los denominadores son 3, 4 y x, cuyas máximas potencias son 1, 1 y 2, respectivamente. Por tanto, el mínimo común denominador es $3(4)x^2 = 12x^2$. Así

$$\frac{\left(\frac{12x^2}{3x}\right)9 - \left(\frac{12x^2}{12x^2}\right)5}{12x^2} = \frac{9(4x) - 5}{12x^2}$$

$$= \frac{36x - 5}{12x^2}$$

$$\frac{9}{3x} - \frac{5}{12x^2} = \frac{36x - 5}{12x^2}$$

b. $\dfrac{x + 6}{5} - \dfrac{x - 3}{4}$

Solución

Como 5 y 4 no tiene factores comunes, su mínimo común múltiplo es $5(4) = 20$ y ése es su MCD; luego

$$= \frac{\left(\frac{20}{5}\right)(x + 6) - \left(\frac{20}{4}\right)(x - 3)}{20}$$

$$= \frac{4(x + 6) - 5(x - 3)}{20} = \frac{4x + 24 - 5x + 15}{20}$$

$$= \frac{-x + 39}{20}$$

Por tanto

$$\frac{x+6}{5}-\frac{x-3}{4}=\frac{-x+39}{20}$$

c. $\dfrac{9x+38}{x^2+3x-10}-\dfrac{8}{x-2}$

Solución

Al factorizar $x^2+3x-10$ resulta $(x+5)(x-2)$. Por consiguiente, los distintos factores de los denominadores son $x+5$ y $x-2$, y como ambas expresiones son polinomios primos, entonces el MCD de los denominadores es su producto, es decir, $(x+5)(x-2)$.

De acuerdo con el MCD obtenido tenemos

$$\frac{\left[\dfrac{\cancel{(x+5)}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+5)}\,\cancel{(x-2)}}\cdot(9x+38)-\dfrac{(x+5)\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}\cdot 8\right]}{(x+5)(x-2)}$$

$$=\frac{9x+38-8(x+5)}{(x+5)(x-2)}=\frac{9x+38-8x-40}{(x+5)(x-2)}$$

$$=\frac{\cancel{x-2}}{(x+5)\,\cancel{(x-2)}}=\frac{1}{x+5}$$

Luego

$$\frac{9x+38}{x^2+3x-10}-\frac{8}{x-2}=\frac{1}{x+5}$$

Ejercicios 4

I. *Efectúa las operaciones que se indican y simplifica el resultado.*

1. $\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{x^2-4x+5}{x^3}$

3. $\dfrac{6n}{n-5}-\dfrac{30}{n-5}$

6

2. $\dfrac{2x}{x^2-16}+\dfrac{8}{x^2-16}$

$\dfrac{2}{x-4}$

4. $\dfrac{9b-5}{b-1}-\dfrac{7b-3}{b-1}$

2

5. $\dfrac{10}{a-5}+\dfrac{2a}{5-a}$

-2

9. $\dfrac{4x-3}{8}-\dfrac{2x-7}{4}$

$\dfrac{11}{8}$

6. $\dfrac{ax}{x-y}-\dfrac{ay}{x-y}$

a

10. $\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x+2}$

$\dfrac{9x+14}{x(x+2)}$

7. $\dfrac{3}{5x}-\dfrac{8}{3x}$

$\dfrac{-31}{15x}$

11. $\dfrac{5x}{x+3}-\dfrac{x}{x-2}$

$\dfrac{x(4x-13)}{(x+3)(x-2)}$

8. $\dfrac{2y-5}{7}+\dfrac{y-2}{2}$

$\dfrac{11y-24}{14}$

12. $\dfrac{x+5}{8}-\dfrac{x-2}{6}$

$\dfrac{-x+23}{24}$

13. $\dfrac{3x+5}{8} - \dfrac{5x-3}{10}$

$\dfrac{-5x+37}{40}$

17. $\dfrac{8a}{a^2-8a+12} + \dfrac{4}{a-2}$

$\dfrac{12}{a-6}$

14. $\dfrac{a}{a^2-4} - \dfrac{1}{a+2}$

$\dfrac{2}{(a+2)(a-2)}$

18. $\dfrac{6a}{a^2-10a+24} + \dfrac{18}{6-a}$

$\dfrac{-12}{a-4}$

15. $\dfrac{6x}{x^2-7x+10} - \dfrac{1}{x-5}$

$\dfrac{5x+2}{(x-5)(x-2)}$

19. $\dfrac{3x}{x-y} + \dfrac{3y}{y-x}$

3

16. $\dfrac{4}{x+5} + \dfrac{7}{x^2-25}$

$\dfrac{4x-13}{(x-5)(x+5)}$

20. $\dfrac{5-4b}{8} - \dfrac{2-3b}{6}$

$\dfrac{7}{24}$

21. $\dfrac{x^2}{x-6} + \dfrac{36}{6-x}$

$x + 6$

22. $\dfrac{7y-2}{y^2-4} - \dfrac{3}{y-2}$

$\dfrac{4}{y+2}$

Fracciones complejas

Una fracción cuyo numerador, denominador o ambos contienen una o más fracciones se llama *fracción compleja;* por ejemplo

$$\frac{\dfrac{x}{x-5}}{\dfrac{5x}{x+6}}$$

Para simplificar una fracción compleja puede seguirse uno de los dos métodos expuestos en seguida.

Métodos para simplificar una fracción compleja

1. Se expresa la fracción compleja como un cociente y se divide.
2. Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja por el mínimo común denominador (MCD) de todas las fracciones que contenga.

A continuación se presentan ejemplos de la aplicación de ambos métodos.

Ejemplo 8

a. Simplifica la fracción compleja

$$\frac{\dfrac{x}{y} - 3}{\dfrac{x}{y} + 3}$$

Solución

Método I: $\dfrac{x}{y} - 3 \div \dfrac{x}{y} + 3$

Efectuemos primero las operaciones indicadas en el dividendo y en el divisor de la expresión anterior.

$$\frac{x}{y} - 3 = \frac{x-3y}{y}$$

$$\frac{x}{y} + 3 = \frac{x+3y}{y}$$

de donde

$$\frac{x}{y} - 3 \div \frac{x}{y} + 3 = \frac{x-3y}{y} \div \frac{x+3y}{y}$$

$$= \frac{\cancel{y}(x-3y)}{\cancel{y}(x+3y)}$$

$$= \frac{x-3y}{x+3y}$$

Método II:

El mínimo común denominador de todas las fracciones es y; luego

$$\frac{y\left(\frac{x}{y} - 3\right)}{y\left(\frac{x}{y} + 3\right)} = \frac{\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}} - 3y}{\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}} + 3y}$$

$$= \frac{x-3y}{x+3y}$$

$$\frac{\frac{x}{y} - 3}{\frac{x}{y} + 3} = \frac{x-3y}{x+3y}$$

b. $\dfrac{16 - \frac{x^2}{y^2}}{4 + \frac{x}{y}}$

Solución

El MCD de todas las fracciones es el monomio y^2; luego, al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja por ese monomio resulta

$$\frac{y^2\left(16 - \frac{x^2}{y^2}\right)}{y^2\left(4 + \frac{x}{y}\right)} = \frac{16y^2 - x^2}{4y^2 + xy}$$

Al factorizar completamente los términos de la fracción anterior resulta

$$\frac{(4y-x)(4y+x)}{y(4y+x)} = \frac{4y-x}{y}$$

Queda a tu cargo simplificar la fracción compleja por el método I.

Ejercicios 4

I. *Simplifica las siguientes fracciones complejas.*

1. $\dfrac{1 + \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$

$$\frac{b+a}{b-a}$$

2. $$\frac{\frac{4}{x}}{7-\frac{6}{x}}$$

$$\frac{4}{7x-6}$$

3. $$\frac{\frac{ax}{x^2-b^2}+\frac{ab}{x^2-b^2}}{\frac{a^2}{x-b}}$$

$$\frac{1}{a}$$

4. $$\frac{\frac{5}{x}+1}{\frac{2}{x}-1}$$

$$\frac{5+x}{2-x}$$

5. $$\frac{\frac{2}{a}-\frac{2}{b}}{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}}$$

$$\frac{b-a}{b+a}$$

6. $$\frac{y^{-2}-x^{-2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$\frac{x-y}{xy}$$

7. $$\frac{y^{-1}-x^{-1}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{-xy}{x-y}$$

8. $$\frac{\frac{a}{a-3}-\frac{a}{a+3}}{\frac{3}{a-3}+\frac{a}{a+3}}$$

$$\frac{6a}{a^2+9}$$

9. $$\frac{x-\frac{8}{x-2}}{1+\frac{4}{x-2}}$$

$$x-4$$

Evaluación

I. *Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. (Elige la opción correcta.)*

1. $\dfrac{4x^5}{6x^2}$

a. $\dfrac{2x^7}{3}$

b. $\dfrac{2}{3x^{10}}$

c. $\dfrac{2}{3x^7}$

d. $\dfrac{2x^3}{3}$

e. $\dfrac{3x^3}{2}$

d. $\dfrac{2x^3}{3}$

2. $\dfrac{6x-24}{x^2-16}$

a. $\dfrac{6}{x-4}$

b. $\dfrac{6}{x+4}$

c. $\dfrac{x-4}{6}$

d. $\dfrac{x+4}{6}$

e. $6(x-4)$

b. $\dfrac{6}{x+4}$

3. $\dfrac{x^2+2x+1}{6x+6}$

a. $x+1$

b. $\dfrac{x+1}{6}$

c. $6(x+1)$

d. $6(x-1)$

e. $\dfrac{x-1}{6}$

b. $\dfrac{x+1}{6}$

4. $\dfrac{3a^2-14a-5}{2a-10}$

a. $\dfrac{3a+1}{2}$

b. $\dfrac{3a-2}{2}$

c. $\dfrac{3a-1}{2}$

d. $\dfrac{3a+2}{2}$

e. $\dfrac{3a+4}{2}$

a. $\dfrac{3a+1}{2}$

5. $\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$

a. $\dfrac{2x-1}{x+3}$

b. $\dfrac{2x-3}{x+3}$

c. $\dfrac{2x+1}{x-3}$

d. $\dfrac{2x+1}{x+3}$

e. $\dfrac{2x-1}{x-3}$

a. $\dfrac{2x-1}{x+3}$

6. $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}$

a. $\dfrac{x-6}{x-1}$

b. $\dfrac{x-1}{x+1}$

c. $\dfrac{x+1}{x-1}$

d. $\dfrac{x+6}{x+1}$

e. $\dfrac{x-6}{x+1}$

e. $\dfrac{x-6}{x+1}$

II. *Haz las multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas. Simplifica la respuesta.*

7. $\dfrac{a^2 - 3a}{5a} \cdot \dfrac{20a^2}{3a - 9}$

a. $\dfrac{a^2}{12}$

b. $\dfrac{12}{a^2}$

c. $\dfrac{4a^2}{3}$

d. $\dfrac{3a^2}{4}$

e. $\dfrac{4a}{3}$

c. $\dfrac{4a^2}{3}$

8. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{5x} \div \dfrac{3x - 15}{15x^2}$

a. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$

b. $x^2 - 2x$

c. $\dfrac{x^2}{2}$

d. $\dfrac{x^2 + 2x}{2}$

e. $x^2 + 2x$

e. $x^2 + 2x$

9. $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{5x - 10}{x^3 - 2x^2 + 4x}$

a. $\dfrac{5}{x}$

b. $\dfrac{2}{x}$

c. $3x$

d. $2x$

e. $\dfrac{3}{x}$

a. $\dfrac{5}{x}$

III. *Efectúa las sumas y restas de estas fracciones algebraicas. (Elige la opción correcta.)*

10. $\dfrac{5x}{x^2-9}-\dfrac{15}{x^2-9}$

a. $5(x+3)$

b. $5(x-3)$

c. $\dfrac{3}{x-3}$

d. $\dfrac{5}{x-3}$

e. $\dfrac{5}{x+3}$

e. $\dfrac{5}{x+3}$

11. $\dfrac{8}{a-4}+\dfrac{2a}{4-a}$

a. 1

b. $\dfrac{2}{a-4}$

c. $\dfrac{1}{a-4}$

d. 2

e. -2

e. -2

12. $\dfrac{5}{3x}+\dfrac{3}{2x}$

a. $\dfrac{13}{6x}$

b. $\dfrac{17}{6x}$

c. $\dfrac{3}{2x}$

d. $\dfrac{5}{2x}$

e. $\dfrac{19}{6x}$

e. $\dfrac{19}{6x}$

13. $\dfrac{7x-4}{4}-\dfrac{3x+2}{3}$

a. $\dfrac{7x-6}{12}$

b. $\dfrac{13x+8}{12}$

c. $\dfrac{9x-20}{12}$

d. $\dfrac{11x-8}{12}$

e. $\dfrac{9x-4}{12}$

c. $\dfrac{9x-20}{12}$

14. $\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{a+1}$

a. $\dfrac{7a+4}{a(a+1)}$

b. $\dfrac{10a+3}{a(a+1)}$

c. $\dfrac{9a+2}{a(a+1)}$

d. $\dfrac{7a+8}{a(a+1)}$

e. $\dfrac{5a+7}{a(a+1)}$

a. $\dfrac{7a+4}{a(a+1)}$

15. $\dfrac{8}{a+b}-\dfrac{8b}{(a+b)^2}$

a. 8

b. $8(a+b)^3$

c. $8(a+b)$

d. $\dfrac{8}{a+b}$

e. $\dfrac{8a}{(a+b)^2}$

e. $\dfrac{8a}{(a+b)^2}$

16. $\dfrac{6x}{x^2 - 10x + 24} + \dfrac{18}{6 - x}$

a. $\dfrac{9}{x - 4}$

b. $\dfrac{-9}{x - 4}$

c. $\dfrac{-12}{x - 4}$

d. $\dfrac{-10x + 72}{(x - 6)(x - 4)}$

e. $\dfrac{12}{x - 4}$

c. $\dfrac{-12}{x - 4}$

IV. *Simplifica las fracciones complejas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

17. $\dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}}$

a. $x(x + 1)$

b. $\dfrac{x + 1}{x}$

c. $\dfrac{x}{x + 1}$

d. $\dfrac{x - 1}{x}$

e. $\dfrac{x}{x - 1}$

b. $\dfrac{x + 1}{x}$

18. $\dfrac{\dfrac{16x^2 - 1}{x^2}}{\dfrac{4x + 1}{x}}$

a. $\dfrac{4x - 1}{x}$

b. $\dfrac{8x - 3}{x}$

c. $x(4x - 1)$

d. $\dfrac{4x + 1}{x}$

e. $\dfrac{x}{4x - 1}$

a. $\dfrac{4x - 1}{x}$

10

Radicales

- Exponentes fraccionarios
- Propiedades de los radicales
- Simplificación de radicales
- Suma y resta de radicales
- Multiplicación de radicales
- División de radicales
- Racionalización del denominador

Exponentes fraccionarios

Consideremos ahora el significado que tiene un exponente fraccionario. Sea x un número real diferente de cero y la fracción $\frac{1}{n}$ un exponente, donde n es un número entero y positivo. Veamos en qué consiste el significado $x^{1/n}$

Para que la primera ley de los exponentes ($x^m \times x^n = x^{1m+n}$) sea válida cuando los exponentes son fraccionarios debe cumplirse que $x^{1/n} \cdot x^{1/n} \cdot x^{1/n}$. factores $= x^{1/n+1/n+1/n+\cdots+}n$ términos. Es decir

$$(x^{1/n})^n = x$$

En otras palabras, $x^{1/n}$ la propiedad de que al elevarse a la potencia n su producto es igual a x. Los siguientes son algunos ejemplos

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$
$$\left(\sqrt[3]{5a}\right)^3 = 5a$$
$$\left(\sqrt[5]{y+3}\right)^5 = y + 3$$
$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$$

De acuerdo con lo anterior tenemos que

Exponente fraccionario

La expresión definiremos $x^{1/n}$ como una raíz de índice n de x, lo que se expresa así

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical* y el entero n es el *índice* de la raíz.

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, que representa la raíz n-ésima principal de a, donde n es el índice u orden del radical y es un número natural mayor o igual a 2. Si $n = 2$, el índice no suele escribirse y corresponde a la operación llamada *raíz cuadrada*. El número a que aparece bajo o dentro del signo radical se llama *radicando* o *subradical*.

Propiedades de los radicales

Las propiedades de los radicales son las mismas que corresponden a los exponentes, ya que como recordarás, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$; por tanto

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$$

A continuación se exponen tales propiedades.

Propiedades de los radicales

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$, con $a \geq 0$

   Demostración: $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/a} = a^1 = a$

2. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

   Demostración: $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

   Asimismo, en sentido contrario tenemos $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, donde $b \neq 0$

   Demostración: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

   Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m} \sqrt[mn]{a}$

Ejemplo 1

a. De la propiedad 1 de los exponentes

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt[4]{5^4} = 5$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a \qquad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

b. De la propiedad 2

$$\sqrt{27}\sqrt{3} = \sqrt{27(3)} = \sqrt{81} = 9$$

c. También de la propiedad 2

$$\sqrt[3]{x^6y^3} = \sqrt[3]{x^6}\,\sqrt[3]{y^3} = x^2y$$

d. De la propiedad 3

$$\sqrt{\frac{25x^4}{4y^6}} = \frac{\sqrt{25x^4}}{\sqrt{4y^6}} = \frac{5x^2}{2y^3}$$

e. Finalmente, los siguientes son un par de ejemplos de la propiedad 4

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[15]{x} \quad \text{y} \quad \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

Emplearemos estas propiedades para simplificar radicales y realizar diversas operaciones algebraicas.

Simplificación de radicales

Decimos que un radical está expresado en su forma más simple o *simplificado* cuando

1. Se han sacado fuera del radical todas las potencias n-ésimas perfectas, de manera tal que el radicando no contenga factores afectados por exponentes mayores o iguales que el índice del radical.
2. El índice del radical es el menor posible.
3. Cuando no haya fracciones en el radicando o subradical.

A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 2

Simplifica los radicales siguientes.

a. $\sqrt{32}$

Solución

Los números naturales 2, 3, 5, 6 y 7 son números que no son cuadrados perfectos; por tanto, se sugiere dividir el radicando entre cada uno de estos números en caso de que sea necesario; si resulta un cociente que sea un número cuadrado perfecto, entonces se descompone en factores el radicando, donde obviamente uno de los factores es el cociente y el otro es el divisor. Después de factorizar se aplica la segunda propiedad de los radicales $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, de manera que

$$\sqrt{32}$$
$$32 \div 2 = 16$$

como 16 es un cuadrado perfecto, entonces

$$\sqrt{32} = \sqrt{16(2)} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Por tanto

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

b. $\sqrt{48}$

Solución

En este caso tenemos que

$$\sqrt{48}$$
$$48 \div 2 = 24 \text{ (no es cuadrado perfecto)}$$
$$48 \div 3 = 16 \text{ (es cuadrado perfecto)}$$

Por consiguiente:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16(3)} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

c. $\sqrt{75}$

Solución

$$\sqrt{75}$$
$$\frac{75}{2} = 37.5 \text{ (no es cuadrado perfecto)}$$
$$\frac{75}{3} = 25 \text{ (es cuadrado perfecto)}$$

por consiguiente:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25(3)} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

d. $\sqrt{72}$

Solución

$$\sqrt{72}$$
$$\frac{72}{2} = 36 \text{ (es cuadrado perfecto)}$$

por tanto:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36(2)} = \sqrt{36}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

e. $\sqrt{x^3}$

Solución

En este ejemplo, observa que el exponente de x es mayor que el índice del radical. Cuando los exponentes de los factores del radicando son mayores que el índice del radical, pero no múltiplos enteros de éste, se escribe cada uno de estos factores como el producto de dos factores, uno con exponente entero múltiplo del índice del radical y el otro con exponente menor que dicho índice; luego se simplifica la expresión.

Es importante recordar el criterio que establecimos en el capítulo 3:

> Cuando aparezcan factores literales dentro de un radical, en esta obra se supondrá que representan números positivos, esto con el fin de que puedan expresarse las respuestas sin signo de valor absoluto.

De acuerdo con lo anterior,

$$\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

f. $\sqrt{y^7}$

Solución

$$\sqrt{y^7} = \sqrt{y^6 \cdot y} = \sqrt{y^6}\sqrt{y} = y^3\sqrt{y}$$
$$\sqrt{y^7} = y^3\sqrt{y}$$

g. $\sqrt{a^5}$

Solución

$$\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 a} = \sqrt{a^4}\sqrt{a} = a^2\sqrt{a}$$
$$\sqrt{a^5} = a^2\sqrt{a}$$

h. $\sqrt[3]{y^4}$

Solución

$$\sqrt[3]{y^4} = \sqrt[3]{y^3 y} = \sqrt[3]{y^3}\sqrt[3]{y}$$
$$\sqrt[3]{y^4} = y^3\sqrt{y}$$

i. $\sqrt{80a^3b^5}$

$$80 \div 2 = 40$$
$$80 \div 3 = 26.6$$
$$80 \div 4 = 20$$
$$80 \div 5 = 16$$

16 es un cuadrado perfecto, por consiguiente:

$$\sqrt{80a^3b^5}$$
$$= \sqrt{16(5)a^2ab^4b}$$
$$= \sqrt{16a^2b^4(5ab)}$$
$$= 4ab^2\sqrt{5ab}$$

j. $7\sqrt{27b^5}$

Solución

$$7\sqrt{9(3)b^4 \cdot b}$$
$$= 7\sqrt{9b^4 \cdot (3b)}$$
$$= 7(3)b^2\sqrt{3b}$$
$$= 21b^2\sqrt{3b}$$

Ejercicios 1

I. *Expresa los radicales siguientes en forma exponencial.*

1. $\sqrt{x}$	4. $\sqrt[3]{x}$	7. $\sqrt[4]{x}$
2. $\sqrt{x^2}$	5. $\sqrt{x^3}$	8. $\sqrt[3]{x^2}$
3. $\sqrt[3]{x^6}$	6. $\sqrt[3]{x^4}$	9. $\sqrt[4]{x^2}$

10. $\sqrt[5]{x}$

11. $\sqrt{x^4}$

12. $\sqrt[4]{x^3}$

II. *Escribe en forma de radical las expresiones siguientes.*

13. $x^{1/2}$

17. $x^{3/4}$

21. $x^{3/8}$

14. $x^{2/3}$

18. $x^{2/9}$

22. $x^{1/5}$

15. $x^{3/7}$

19. $x^{1/4}$

23. $x^{2/5}$

16. $x^{1/3}$

20. $x^{3/5}$

24. $x^{4/5}$

III. *Escribe en su forma más simple estos radicales. (Simplifica.)*

25. $\sqrt{8} =$

26. $\sqrt{63x^4} =$

27. $\sqrt{24} =$

28. $\sqrt{32} =$

29. $\sqrt{75x^3} =$

30. $\sqrt{150} =$

31. $\sqrt{63x^2} =$

32. $\sqrt{98x^3} =$

33. $\sqrt[3]{27x^7} =$

34. $\sqrt{48} =$

35. $\sqrt{20a^9} =$

36. $\sqrt{72x^2} =$

37. $\sqrt{x^7} =$

38. $\sqrt{63} =$

39. $\sqrt[3]{x^4} =$

40. $\sqrt{x^3y} =$	43. $\sqrt{xy^2} =$	46. $\sqrt{36b^2} =$
41. $\sqrt{112} =$	44. $\sqrt{20x^3} =$	47. $\sqrt{24y^5} =$
42. $\sqrt[3]{8y^5} =$	45. $\sqrt{16x^4} =$	48. $\sqrt[3]{27a^3b^6c^{12}} =$

Suma y resta de radicales

Dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando; por ejemplo, $7\sqrt[3]{ab}$ $6\sqrt[3]{ab}$ son radicales semejantes, cuyo índice es 3 y el radicando, *ab*.

Para sumar o restar algebraicamente dos o más radicales primero se simplifican, es decir, se escriben en su forma más simple, y luego se reducen radicales semejantes aplicando la ley distributiva de la multiplicación.

Ejemplo 3 Simplifica y reduce radicales semejantes.

a. $\sqrt{18a} + \sqrt{50a} - \sqrt{72a}$

Solución

Observa que respecto al factor literal, el radical está simplificado, ya que su exponente es 1 y el índice del radical es 2. Entonces, lo que hay que simplificar son los radicales $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, de esta forma

$$\sqrt{9(2a)} + \sqrt{25(2a)} - \sqrt{36(2a)}$$
$$= 3\sqrt{2a} + 5\sqrt{2a} - 6\sqrt{2a}$$
$$= \sqrt{2a}(3 + 5 - 6)$$
$$= \sqrt{2a}(2)$$
$$= 2\sqrt{2a}$$

b. $2\sqrt{27x^3} - 4\sqrt{12x^3}$

Solución

$$2\sqrt{9x^2(3x)} - 4\sqrt{4x^2(3x)}$$
$$= 6x\sqrt{3x} - 8x\sqrt{3x}$$
$$= \sqrt{3x}(6x - 8x)$$
$$= -2x\sqrt{3x}$$

Ejercicios 2

I. *Efectúa las operaciones indicadas reduciendo radicales semejantes.*

1. $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} =$

$5\sqrt{5}$

2. $2\sqrt{ab} - 9\sqrt{ab} =$

3. $7\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} - 4\sqrt{32x} =$

$-19\sqrt{2x}$

4. $3\sqrt{72x} - 2\sqrt{98x} - 8\sqrt{2x} =$

5. $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{4x^3} - x\sqrt{16x} =$

$-7x\sqrt{x}$

6. $7y\sqrt{y} + 3y\sqrt{16y} - 3\sqrt{64y^3} =$

7. $\sqrt{49a^3} - 5\sqrt{16a^3} - 2\sqrt{64a^3} =$

$-29a\sqrt{a}$

8. $\sqrt{18a^3} - 7\sqrt{2a^3} + 3a\sqrt{50a} =$

9. $\sqrt{49x^3} - 3x\sqrt{x} + \sqrt{4x^3} =$

10. $6\sqrt{3a} + 7\sqrt{12a} - 8\sqrt{27a} =$

$-4\sqrt{3a}$

11. $\sqrt{36x^3} - \sqrt{4x^3} + x\sqrt{9x} =$

12. $5\sqrt{16x} + \sqrt{9x} - 5\sqrt{x} =$

13. $\sqrt{8a} - \sqrt{18a} + 3\sqrt{32a} =$

14. $5\sqrt{48x} - 3\sqrt{75x} - \sqrt{3x} =$

15. $\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x^3} + \sqrt{25x^3} =$

18. $\sqrt{8x^3} - x\sqrt{18x} + \sqrt{2x^3} =$

16. $6\sqrt{18y} - 7\sqrt{50y} + 5\sqrt{32y} =$

19. $\sqrt{50x^5} - \sqrt{128x^5} + \sqrt{18x^5} =$

17. $\sqrt{72a} - \sqrt{32a} - \sqrt{8a} =$

20. $\sqrt{x^5} + \sqrt{16x^5} - \sqrt{4x^5} =$

$3x^2\sqrt{x}$

Multiplicación de radicales

Al multiplicar dos o más radicales del mismo índice se utiliza la primera propiedad de los radicales

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \text{ por ejemplo, } \sqrt{x^5}\sqrt{x^3} = \sqrt{x^5x^3} = \sqrt{x^8} = x^4$$

Para multiplicar radicales con índices diferentes pero con el mismo radicando se expresan los factores con exponentes fraccionarios y luego se aplica la regla de los exponentes correspondiente; por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\\
&= x^{1/2}x^{2/3}\\
&= x^{1/2+2/3}\\
&= x^{7/6}\\
&= \sqrt[6]{x^7}\\
&= \sqrt[6]{x^6}\sqrt[6]{x}\\
&= x\sqrt[6]{x}
\end{aligned}
$$

Para multiplicar un radical por una expresión que contiene más de un término o dos expresiones radicales, cada una con más de un término, se aplica el método o el proceso empleado en la multiplicación de polinomios.

Ejemplo 4

a. $5\sqrt{3}\left(7\sqrt{2} - 4\sqrt{5}\right)$

Solución

$$
\begin{aligned}
&5\sqrt{3}\left(7\sqrt{2} - 4\sqrt{5}\right)\\
&= 5\sqrt{3}\left(7\sqrt{2}\right) - 5\sqrt{3}\left(4\sqrt{5}\right)\\
&= 35\sqrt{6} - 20\sqrt{15}
\end{aligned}
$$

b. $\left(7 + \sqrt{5}\right)\left(7 - \sqrt{5}\right)$

Solución

$$
\begin{aligned}
&\left(7 + \sqrt{5}\right)\left(7 - \sqrt{5}\right)\\
&= 7\left(7 - \sqrt{5}\right) + \sqrt{5}\left(7 - \sqrt{5}\right)\\
&= 49 - 7\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{25}\\
&= 49 - 5\\
&= 44
\end{aligned}
$$

También así:

$$
\begin{aligned}
&7^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\\
&= 49 - 5\\
&= 44
\end{aligned}
$$

c. $\left(2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}\right)^2$

Solución

$$
\begin{aligned}
&\left(2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}\right)^2\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(2\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{5}\right) + \left(4\sqrt{5}\right)^2\\
&= 4(3) - 16\sqrt{15} + 16(5)\\
&= 12 - 16\sqrt{15} + 80\\
&= 92 - 16\sqrt{15}
\end{aligned}
$$

Ejercicios 3

I. *Efectúa la multiplicación entre radicales indicada y simplifica.*

1. $\sqrt{2}\sqrt{8} =$

4

2. $\sqrt{xy}\sqrt{x} =$

$x\sqrt{y}$

3. $\sqrt{5a^3}\sqrt{20a} =$

$10a^2$

4. $\sqrt{3}\sqrt{27} =$

9

5. $\sqrt{x^3}\sqrt{2x}$

$x^2\sqrt{2}$

6. $\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{6} =$

6

7. $\sqrt{18x^2y}\sqrt{2xy^3} =$

$6xy^2\sqrt{x}$

8. $\sqrt{xy}\sqrt{y} =$

$y\sqrt{x}$

9. $\left(3\sqrt{b}\right)\left(-4\sqrt{b}\right) =$

$-12b$

13. $\left(2a\sqrt{5a}\right)\left(4\sqrt{5a}\right) =$

$40a^2$

10. $\sqrt[4]{x^3}\,\sqrt[4]{x}$

x

14. $\left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\right) =$

-1

11. $\sqrt{3a}\sqrt{6a} =$

$3a\sqrt{2}$

15. $\left(\sqrt{11} + \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{11} - \sqrt{12}\right) =$

-1

12. $\left(-7\sqrt{x^2y}\right)\left(2\sqrt{y}\right) =$

$-14xy$

16. $\sqrt{x^5}\sqrt{x^3} =$

x^4

17. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)=$

-8

18. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)=$

$x-5$

19. $\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)=$

3

20. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)=$

-4

21. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{x}\right)=$

$7-x$

22. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=$

$8+2\sqrt{15}$

23. $\sqrt[3]{4x}\sqrt[3]{16x^2}=$

$4x$

24. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=$

$7-2\sqrt{10}$

División de radicales

Para dividir radicales del mismo índice se aplica la propiedad $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ y luego se simplifica (obviamente, $b \neq 0$).

Ejemplo 5 Resuelve las operaciones siguientes y simplifica.

a. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Solución

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

b. $\frac{\sqrt{x^7 y^3}}{\sqrt{x^4 y}}$

Solución

$$\frac{\sqrt{x^7 y^3}}{\sqrt{x^4 y}} = \sqrt{\frac{x^7 y^3}{x^4 y}} = \sqrt{x^3 y^2} = \sqrt{x(x^2)y^2} = xy\sqrt{x}$$

Para dividir dos radicales de diferente índice, primero se expresan éstas en forma exponencial y después se aplican las propiedades de los exponentes respectivas.

Ejemplo 6 Haz las divisiones de radicales siguientes.

a. $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{4/3}}{x^{1/2}} = x^{\left(\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Se efectúa por separado la resta de los exponentes

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}\right)$$
$$= \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Por consiguiente

$$x^{\left(\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$$

b. $\sqrt[3]{x^5} \div \sqrt[4]{x}$

Solución

$$x^{5/3} \div x^{1/4}$$
$$x^{\left(\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Al realizar la resta de los exponentes por separado resulta

$$\frac{5}{3}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{5}{3}\left(\frac{4}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{3}\right)$$
$$=\frac{20}{12}-\frac{3}{12}=\frac{17}{12}$$

Por tanto

$$x^{17/12}=\sqrt[12]{x^{17}}$$

Como el exponente del radicando es mayor que el índice del radical debe simplificarse la expresión

$$x^{\left(\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)}=\sqrt[12]{x^{12}x^{5}}=x\sqrt[12]{x^{5}}$$

Ejercicios 4

I. *Resuelve estas divisiones de radicales y simplifica.*

1. $\dfrac{\sqrt{32xy^4}}{\sqrt{2x^3y^2}}=$

   $\dfrac{4y}{x}$

2. $\dfrac{\sqrt{24x^4y}}{\sqrt{3xy^4}}=$

   $\dfrac{2x}{y}\sqrt{\dfrac{2x}{y}}$

3. $\dfrac{\sqrt{8x^5y}}{\sqrt{2x}}=$

   $2x^2\sqrt{y}$

4. $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{25x}}=$

   $\dfrac{x^2}{5}$

5. $\dfrac{\sqrt{48xy^5}}{\sqrt{3x^5y}}=$

   $\dfrac{4y^2}{x^2}$

6. $\dfrac{\sqrt{x^4y^5}}{\sqrt{4x^2y}}=$

   $\dfrac{xy^2}{2}$

7. $\dfrac{\sqrt{75x}}{\sqrt{3}} =$

$5\sqrt{x}$

8. $\dfrac{\sqrt{18x^4y^5}}{\sqrt{2xy}} =$

$3xy^2\sqrt{x}$

Racionalización del denominador

El proceso de eliminar radicales de un denominador se llama *racionalización del denominador*. Ahora veremos los siguientes casos de racionalización del denominador.

Caso 1.

Cuando el denominador de una fracción es un radical de la forma $\sqrt{a}$, se multiplica tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{a}$ y se simplifica la expresión que resulta.

Ejemplo 7

Racionaliza los denominadores de los radicales siguientes.

a. $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

b. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{35}$$

c. $\dfrac{6x}{\sqrt{x}}$

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{x}$

$$\frac{6x}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6x\sqrt{x}}{x} = 6\sqrt{x}$$

Caso 2.

Cuando el denominador de una fracción es una expresión de dos términos que contienen radicales de índice 2, se multiplican tanto el numerador como denominador por el conjugado de la expresión de ese denominador para racionalizarlo.

Racionaliza los denominadores de los radicales siguientes.

Ejemplo 8

a. $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

$$\frac{(3)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$$

$$\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

b. $\dfrac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Solución

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado de $\left(5-\sqrt{2}\right)$

$$\frac{\left(5+\sqrt{2}\right)}{\left(5-\sqrt{2}\right)}\frac{\left(5+\sqrt{2}\right)}{\left(5+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}{25-2}$$

$$=\frac{(5)^2+2(5)\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{23}$$

$$=\frac{25+10\sqrt{2}+2}{23}$$

$$=\frac{27+10\sqrt{2}}{23}$$

Ejercicios 5

I. *Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones con radicales.*

1. $\dfrac{7}{\sqrt{2}}=$

$\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

2. $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=$

$\sqrt{x}$

3. $\dfrac{9x}{\sqrt{x}} =$

$9\sqrt{x}$

4. $\dfrac{10z}{\sqrt{5z}} =$

$2\sqrt{5z}$

5. $\dfrac{9x}{\sqrt{3x}} =$

$3\sqrt{3x}$

6. $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}} =$

$5\sqrt{x}$

7. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} =$

$x\sqrt{x}$

8. $\dfrac{7x}{\sqrt{x}} =$

$7\sqrt{x}$

9. $\dfrac{5a}{\sqrt{5a}} =$

$\sqrt{5a}$

10. $\dfrac{a^3}{\sqrt{a}} =$

$a^2\sqrt{a}$

11. $\dfrac{48}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} =$

$16\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

12. $\dfrac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} =$

$\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{2}$

13. $\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

$-5\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

14. $\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}} =$

$\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$

15. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} =$

$\sqrt{7}-\sqrt{5}$

16. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} =$

$\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$

17. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

$4+\sqrt{15}$

18. $\dfrac{2+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}} =$

$\dfrac{7+3\sqrt{6}}{5}$

Evaluación

I. *Expresa en su forma más simple los radicales siguientes. Relaciona correctamente las columnas.*

$\sqrt{75x^2y^4}$ ( )

$\sqrt{48a^4}$ ( )

$\sqrt[3]{8x^4}$ ( )

$\sqrt{112x^3}$ ( )

a. $4x\sqrt{7x}$

b. $4\sqrt{2x}$

c. $3x^2\sqrt{7x}$

d. $5x\sqrt{2x}$

e. $5x\sqrt{7x}$

f. $5xy^2\sqrt{3}$

g. $b^2\sqrt{b}$

h. $8b^2\sqrt{b}$

i. $3\sqrt[3]{2x}$

j. $2x\sqrt[3]{2y}$

k. $6x\sqrt{7x}$

l. $xy\sqrt{x}$

m. $4a^2\sqrt{3}$

n. $2x\sqrt[3]{x}$

o. $4xy\sqrt[3]{x^2y}$

II. *Simplifica las expresiones siguientes reduciendo radicales semejantes. Escribe en el paréntesis la respuesta correcta.*

5. ( ) $9\sqrt{8x} - 5\sqrt{32x} - 2\sqrt{98x} + \sqrt{2x}$

a. $-15\sqrt{2x}$

b. $11\sqrt{2x}$

c. $-13\sqrt{2x}$

d. $-14\sqrt{2x}$

e. $-11\sqrt{2x}$

6. ( ) $5\sqrt{12x} - 2\sqrt{48x} + \sqrt{3x}$

a. $5\sqrt{2x}$

b. $3\sqrt{3x}$

c. $5\sqrt{3x}$

d. $2\sqrt{3x}$

e. $4\sqrt{3x}$

III. *Racionaliza los denominadores de las expresiones con radicales siguientes.*

7. ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $4\sqrt{x}$

c. $\sqrt{x}\sqrt{4}$

d. $4x^2$

e. $\dfrac{4\sqrt{x}}{x}$

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

8. ( ) $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}}$

a. $3x\sqrt{2x}$

b. $6\sqrt{2x}$

c. $3\sqrt{2x}$

d. $3x^2\sqrt{2x}$

c. $3\sqrt{2x}$

9. ( ) $\dfrac{12}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

a. $3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

b. $3\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

c. $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

d. 6

e. $3\sqrt{8}$

c. $3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

IV. *Efectúa las multiplicaciones y divisiones de radicales que se indican y simplifica la respuesta. Relaciona correctamente las columnas.*

10. $\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)$ ( )

11. $\sqrt{18x^3y}\sqrt{2xy^3}$ ( )

12. $\sqrt[3]{x}\sqrt{x}$ ( )

13. $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$ ( )

14. $\dfrac{\sqrt{24x^2y^3}}{\sqrt{3xy^2}}$ ( )

15. $\dfrac{\sqrt{a^3b^4}}{\sqrt{ab}}$ ( )

a. $3x^2$

b. $-135-3\sqrt{10}$

c. $x\sqrt[6]{x}$

d. $23+4\sqrt{15}$

e. $10-2\sqrt{21}$

f. $3xy^2\sqrt{x}$

g. $6x^2\sqrt{y}$

h. $2\sqrt{2xy}$

i. $2a$

j. $\sqrt[6]{x^5}$

k. $10x^2$

l. $\sqrt[6]{x^7}$

m. $6x^2y^2$

n. $ab\sqrt{b}$

o. $10\sqrt{6}$

p. $\sqrt[3]{x^2}$

q. $-170+2\sqrt{10}$

r. $10+2\sqrt{21}$

s. 5

t. $3x\sqrt{2}$

u. $2\sqrt{xy}$

11

Ecuaciones

- Definición de conceptos
- Solución de ecuaciones
- Ecuaciones lineales con una incógnita
- Ecuaciones racionales
- Ecuaciones radicales de la forma $\sqrt{ax + b} = c$
- ecuaciones con valor absoluto de la forma $|ax + b| = c$

Definición de conceptos

Como en capítulos anteriores, conviene empezar definiendo los conceptos básicos relacionados con el estudio de las ecuaciones, tema de este capítulo.

Ecuación

Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, las cuales se denominan *miembros* de la igualdad; por ejemplo, $7x - 6 = x + 3$.

Incógnitas de una ecuación

Son las literales (como x, y o z) que intervienen en las expresiones algebraicas que forman la ecuación y cuyos valores numéricos se desea encontrar (o sea, son variables).

Dominio de definición en una ecuación

Es el conjunto de todos los números reales que pueden tomar las incógnitas de una ecuación; por ejemplo, en la ecuación $\frac{x-2}{x-5} = 4$, el dominio de la variable x es el conjunto de los números reales excepto el 5, ya que si x toma este valor, el denominador sería cero y la división entre cero no está definida.

Identidad

Es toda igualdad que se verifica (es válida) para todos los valores del dominio de las incógnitas. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, cualquiera que sean los valores para x y y, la igualdad siempre es válida.

Ecuación condicional

Es toda ecuación que se verifica sólo para ciertos valores de incógnitas. Por ejemplo, la ecuación $x + 9 = 12$ sólo es válida si $x = 3$, y la ecuación $x^2 = 16$ sólo se verifica si $x = 4$ o $x = -4$.

Conjunto solución

Es el conjunto de los valores numéricos que al ser sustituidos en el lugar de las incógnitas dan como resultado una identidad numérica, es decir, se verifica la ecuación. Estos valores se llaman también *raíces de la ecuación*.

Ejemplo 1

a. El valor $x = 2$ es solución de la ecuación $6x + 4 = 16$ porque:

$$
\begin{aligned}
6(2) + 4 &= 16 \\
12 + 4 &= 16 \\
16 &= 16
\end{aligned}
$$

b. El par de valores $x = -2$, $y = 3$ es una solución de la ecuación $2x + 3y = 5$, ya que:

$$
\begin{aligned}
2(-2) + 3(3) &= 5 \\
-4 + 9 &= 5 \\
5 &= 5
\end{aligned}
$$

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, $2x - 14 = 0$ y $3x - 21 = 0$ son ecuaciones equivalentes porque el conjunto solución de ambas es 7.

Solución de ecuaciones

Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución, es decir, hallar el o los valores que satisfacen esa ecuación.

El proceso que implica resolver una ecuación consiste, en general, en transformar ésta en ecuaciones equivalentes cada vez más simples. Esta transformación se realiza efectuando ciertas operaciones que resultan de la aplicación de las propiedades de la igualdad, las cuales mencionaremos a continuación.

Propiedad aditiva de la igualdad

Si a, b y c son tres números reales cualquiera, tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Esta propiedad permite deducir que si sumamos un mismo número en ambos miembros de la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente. Esta propiedad también se puede aplicar para la resta porque está definida en términos de la suma; así:

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Por tanto, se deduce que si restamos números iguales en ambos miembros de la ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

Ejemplo 2

a. Resuelve la ecuación $x - 7 = 10$.

Solución

$$\begin{aligned} x - 7 &= 10 \\ x - 7 + 7 &= 10 + 7 \\ x + 0 &= 10 + 7 \\ x &= 10 + 7 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Observa que el 7 aparece en el miembro derecho con signo contrario al que tiene en el miembro izquierdo de la ecuación inicial.

b. Resuelve la ecuación $y + 8 = 1$.

Solución

$$\begin{aligned} y + 8 &= 1 \\ y + 8 - 8 &= 14 - 8 \\ y + 0 &= 14 - 8 \\ y &= 14 - 8 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Observa que el 8 aparece en el miembro derecho con el signo contrario al que tiene en el miembro izquierdo de la ecuación inicial.

A partir de la aplicación de la propiedad aditiva de la igualdad, podemos deducir que es posible transponer un término de una ecuación de un miembro a otro cambiándole el signo.

Propiedad multiplicativa de la igualdad

Esta propiedad establece que si ambos miembros de una igualdad de números reales se multiplican por un mismo número no nulo, resulta otra igualdad equivalente a la igualdad inicial; es decir, si $c \neq 0$ y $a = b$, entonces $ac = bc$.

Esta propiedad también permite dividir ambos miembros de una igualdad de números reales entre un número real no nulo y obtener una igualdad equivalente a la inicial porque, como recordarás, $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$, con $b \neq 0$.

Es importante destacar que el número por el que se deben multiplicar ambos miembros de una ecuación para obtener una ecuación equivalente a ellos debe ser diferente de cero.

Cuando se multiplican ambos miembros de la ecuación por una misma expresión que contenga la incógnita, no siempre se obtiene una ecuación equivalente a la inicial. Por ejemplo, $2x = 18$ se satisface únicamente para $x = 9$; en cambio, si se multiplican ambos miembros de la ecuación por x, resulta $2x^2 = 18x$, la cual se satisface para $x = 0$ y para $x = 9$. Es decir, la ecuación no es equivalente a la inicial.

Si en el proceso de solución de una ecuación se obtiene una raíz que no satisface la ecuación original, ésta se llama *raíz extraña*.

Ejemplo 3

a. Resuelve la ecuación $\frac{x}{4} = 5$.

Solución

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación por 4 se obtiene

$$\cancel{4}\left(\frac{x}{\cancel{4}}\right) = 5(4)$$
$$x = 5(4)$$
$$x = 20$$

Como se observa, el 4 aparece en el miembro derecho multiplicando.

b. Resuelve la ecuación $\frac{x}{7} = 3$

Solución

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 7, resulta:

$$\cancel{7}\left(\frac{x}{\cancel{7}}\right) = 3(7)$$
$$x = 3(7)$$
$$x = 21$$

El 7 aparece en el miembro derecho multiplicando.

c. Resuelve la ecuación $5x = 40$.

Solución

Si se dividen ambos miembros de la ecuación entre 5 resulta:

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{40}{5}$$
$$x = \frac{40}{5}$$
$$x = 8$$

Ahora el 5 aparece en el miembro derecho dividiendo.

Si $n \neq 0$, la solución de la ecuación $nx = m$ es $x = \frac{m}{n}$ y la solución de $\frac{x}{n} = m$ es $x = nm$

Ejemplo 4

a. Resuelve la ecuación $8x = 24$.

Solución

$$8x = 24$$
$$x = \frac{24}{8}$$
$$x = 3$$

b. Resuelve la ecuación $-6x = 42$.

Solución

$$-6x = 42$$
$$x = \frac{42}{-6}$$
$$x = -7$$

c. Resuelve la ecuación $\frac{x}{4} = 7$.

Solución

$$\frac{x}{4} = 7$$
$$x = 7(4)$$
$$x = 28$$

d. Resuelve la ecuación $\frac{x}{-2} = 6$.

Solución

$$\frac{x}{-2} = 6$$
$$x = 6(-2)$$
$$x = -12$$

Otras transformaciones que se realizan en el proceso de resolución de ecuaciones son las que resultan de elevar ambos miembros de una ecuación a una misma potencia.

Si ambos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia se obtiene otra ecuación, la cual no necesariamente es equivalente a la original.

Ejemplo 5

a. Resuelve la ecuación $\sqrt{x-4} = 6$.

Solución

Elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\left[\sqrt{x-4}\right]^2 = 6^2$$

Recuerda que $\sqrt{x-4} = (x-4)^{1/2}$ por tanto, tenemos:

$$\left[(x-4)^{1/2}\right]^2 = 6^2$$
$$(x-4)^{2/2} = 36$$
$$x - 4 = 36$$
$$x = 36 + 4$$
$$x = 40$$

Este tipo de transformación puede introducir *raíces extrañas* en el proceso de solución de una ecuación, por lo que hay que comprobar si el valor de x satisface verdaderamente la ecuación original.

Comprobación

$$\sqrt{x-4}=6$$
$$\sqrt{40-4}=6$$
$$\sqrt{36}=6$$
$$6=6$$

Así, tenemos que, en efecto, $x = 40$ es la solución de la ecuación $\sqrt{x-4}=6$.

b. Resuelve la ecuación $\sqrt{x+7}=3$.

Solución

$$\sqrt{x-7}=3$$
$$(x+7)^{1/2}=3$$

Si elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado resulta:

$$\left[(x+7)^{1/2}\right]^2=(3)^2$$
$$(x+7)^{1/2}=9$$
$$x+7=9$$
$$x=9-7$$
$$x=2$$

Comprobaremos de nuevo si la ecuación original se satisface y no se trata de una raíz extraña.

Comprobación

$$\sqrt{x+7}=3$$
$$\sqrt{2+7}=3$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

por tanto

$x = 2$ es la solución de $\sqrt{x+7}=3$.

c. Resuelve la ecuación $\sqrt{y+13}+6=2$

Solución

$$\sqrt{y+13}+6=2$$
$$\sqrt{y+13}=2-6$$
$$\sqrt{y+13}=-4$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y obtenemos:

$$\left[(y+13)^{1/2}\right]^2=(-4)^2$$
$$y+13=16$$
$$y=16-13$$
$$y=3$$

Al sustituir en la ecuación original este valor de y observamos que se trata de una raíz extraña, por lo que la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 6

Si se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente a la anterior.

d. Resuelve la ecuación $x^2 = 16$.

Solución

Si se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

Recuerda que $\sqrt{x^2} = |x|$. Al aplicar esta propiedad en nuestra ecuación resulta:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$
$$|x| = 4$$

de donde se deduce que el conjunto solución de esta ecuación tiene dos elementos:

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -4$$

Puedes ver que las raíces no son extrañas.

Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es la que puede escribirse en la forma $ax + b = c$, donde a es diferente de cero. Este tipo de ecuaciones también reciben el nombre de *ecuaciones de primer grado* porque el mayor grado al que está elevado uno de sus términos es 1, o primer grado.

Para resolver las ecuaciones lineales con una incógnita se aplican las propiedades aditivas y multiplicativas de la igualdad que hemos estudiado.

A continuación presentamos algunas sugerencias que puedes considerar en el proceso de resolución de una ecuación lineal.

Sugerencias para resolver ecuaciones lineales

1. Si en la ecuación aparecen coeficientes fraccionarios, se deben multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores numéricos presentes en ella para obtener así una ecuación sin coeficientes fraccionarios; por ejemplo, si se tiene:

$$\tfrac{4}{9}x + \tfrac{2}{15} = 2$$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 45, ya que ése es el mínimo común denominador de 9 y 15:

$$45\left(\tfrac{4}{9}x + \tfrac{2}{15}\right) = 2(45)$$

Ahora se aplica la propiedad distributiva respecto a la suma para obtener:

$$20x + 6 = 90$$

y ahora se resuelve la ecuación como ya sabes:

$$x = \tfrac{84}{20} = \tfrac{21}{5}$$

2. Es preciso eliminar los signos de agrupación en caso de que los haya, como en este ejemplo:

$$2(x - 5) - 4(x - 6) = -7(x + 1)$$
$$2x - 10 - 4x + 24 = -7x - 7$$

3. Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.
4. Mediante la transposición, se agrupan en un mismo miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro los que no la tienen.
5. Reducir nuevamente términos semejantes permitirá obtener una ecuación de la forma $ax = b$, donde, como ya sabemos, $x = \frac{b}{a}$ con $a \neq 0$.
6. Se verifica que la solución sea correcta sustituyendo en la ecuación original la incógnita por la raíz obtenida.

Ejemplo 7

a. Resuelve la ecuación $3x - 7 = 20$.

Solución

En esta ecuación lo primero que debes hacer es transponer el 7 al miembro derecho con signo positivo:

$$3x = 20 + 7$$
$$3x = 27$$

A continuación, el 3 que está multiplicando a la x pasa dividiendo al miembro derecho:

$$x = \frac{27}{3}$$
$$x = 9$$

Comprobación

$$3x - 7 = 20$$
$$3(9) - 7 = 20$$
$$27 - 7 = 20$$
$$20 = 20$$

b. Resuelve la ecuación $5x + 16 = 6$.

Solución

En esta ecuación primero se pasa el 16 al miembro derecho con signo negativo:

$$5x = 6 - 16$$
$$5x = -10$$

Después, el coeficiente numérico de la x, que es el 5, pasa dividiendo al miembro derecho:

$$5x = -10$$
$$x = \frac{-10}{5}$$
$$x = -2$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
5x + 16 &= 6\\
5(-2) + 16 &= 6\\
-10 + 16 &= 6\\
6 &= 6
\end{aligned}
$$

c. Resuelve la ecuación $5x - 2 = 3x - 8$.

Solución

En este caso, el 2 se pasa al miembro derecho con signo positivo y el término $3x$, al miembro izquierdo con signo negativo:

$$
\begin{aligned}
5x - 2 &= 3x - 8\\
5x - 3x &= -8 + 2
\end{aligned}
$$

Reducimos términos semejantes y resulta:

$$2x = -6$$

En seguida, el factor 2 pasa dividiendo al miembro derecho:

$$x = \frac{-6}{2}$$

$$x = -3$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
5x - 2 &= 3x - 8\\
5(-3) - 2 &= 3(-3) - 8\\
-15 - 2 &= -9 - 8\\
-17 &= -17
\end{aligned}
$$

d. Resuelve la ecuación $4(x - 5) - 3(7 + 2x) + 57 = 6(4 - x) + 2(x - 8)$.

Solución

Primero debes eliminar los signos de agrupación aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$4x - 20 - 21 - 6x + 57 = 24 - 6x + 2x - 16$$

Reducimos términos semejantes en ambos miembros de la ecuación y obtenemos:

$$-2x + 16 = -4x + 8$$

Ahora debes hacer la transposición de términos: pasamos $-4x$ al miembro izquierdo con signo positivo y el 16 al miembro derecho con signo negativo:

$$
\begin{aligned}
-2x + 4x &= 8 - 16\\
2x &= -8\\
x &= \frac{-8}{2}\\
x &= -4
\end{aligned}
$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
4(-4 - 5) - 3[7 + 2(-4)] + 57 &= 6[4 - (-4)] + 2(-8 - 8)\\
4(-9) - 3[7 - 8] + 57 &= 6(8) + 2(-12)\\
-36 - 3(-1) + 57 &= 48 - 24\\
24 &= 24
\end{aligned}
$$

e. Resuelve la ecuación $\frac{3}{4}x - 8 = \frac{x}{3}$.

Solución

Para eliminar los coeficientes fraccionarios hay que multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador, que es 4(3) = 12:

$$12\left(\frac{3x}{4} - 8\right) = 12\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\frac{12}{4}(3x) - 12(8) = \frac{12}{3}x$$

$$9x - 96 = 4x$$

$$9x - 4x = 96$$

$$5x = 96$$

$$x = \frac{96}{5}$$

$$x = 19.2$$

Comprobación

$$\frac{3(19.2)}{4} - 8 = \frac{19.2}{3}$$

$$14.4 - 8 = 6.4$$

$$6.4 = 6.4$$

Ejercicios 1

I. *Determina el conjunto de las ecuaciones lineales (o ecuaciones de primer grado) siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $12x = 48$

a. $x = 4$
b. $x = \frac{1}{4}$
c. $x = 36$
d. $x = 60$

a. $x = 4$

2. $9x = 72$

a. $x = \frac{1}{8}$
b. $x = 8$
c. $x = 63$
d. $x = 81$

b. $x = 8$

3. $4x = -24$

a. $x = 6$
b. $x = -28$
c. $x = -20$
d. $x = -6$

d. $x = -6$

4. $-6x = -30$

a. $x = -24$
b. $x = -36$
c. $x = -5$
d. $x = 5$

d. $x = 5$

5. $-2x = 0$

a. $x = 2$
b. $x = -2$
c. $x = 0$
d. $x = -\frac{1}{2}$

c. $x = 0$

10. $\frac{x}{-2} = 8$

a. $x = -16$
b. $x = 16$
c. $x = 10$
d. $x = 6$

a. $x = -16$

6. $6y = 0$

a. $y = -6$
b. $y = 6$
c. $y = 0$
d. $y = \frac{1}{6}$

c. $y = 0$

11. $\frac{x}{5} = -2$

a. $x = -\frac{2}{5}$
b. $x = \frac{2}{5}$
c. $x = 10$
d. $x = -10$

d. $x = -10$

7. $6y = 1$

a. $y = 6$
b. $y = -5$
c. $y = 7$
d. $y = \frac{1}{6}$

d. $y = \frac{1}{6}$

12. $\frac{y}{-3} = -4$

a. $y = \frac{4}{3}$
b. $y = -12$
c. $y = 12$
d. $y = -1$

c. $y = 12$

8. $-6x = -12$

a. $x = 2$
b. $x = -2$
c. $x = -6$
d. $x = -18$

a. $x = 2$

13. $x + 5 = 12$

a. $x = 7$
b. $x = 17$
c. $x = \frac{12}{5}$
d. $x = 60$

a. $x = 7$

9. $\frac{x}{6} = 5$

a. $x = -1$
b. $x = \frac{5}{6}$
c. $x = 30$
d. $x = 11$

c. $x = 30$

14. $y + 6 = -4$

a. $y = -10$
b. $y = 2$
c. $y = -24$
d. $y = -\frac{2}{3}$

a. $y = -10$

15. $y + 9 = 9$
a. $y = 18$
b. $y = 0$
c. $y = 1$
d. $y = 81$

b. $y = 0$

16. $x + 2 = -2$
a. $x = 4$
b. $x = -1$
c. $x = -4$
d. $x = 0$

c. $x = 4$

17. $x - 7 = 4$
a. $x = 11$
b. $x = 3$
c. $x = -3$
d. $x = -28$

a. $x = 11$

18. $x - 3 = -1$
a. $x = \frac{1}{3}$
b. $x = -4$
c. $x = 2$
d. $x = 3$

c. $x = 2$

19. $x - 7 = -10$
a. $x = -3$
b. $x = 3$
c. $x = -17$
d. $x = 17$

a. $x = -3$

20. $y - 2 = -2$
a. $y = -4$
b. $y = 0$
c. $x = 4$
d. $x = 1$

b. $y = 0$

21. $-7x - 10 = 18$
a. $x = \frac{8}{7}$
b. $x = 4$
c. $x = -4$
d. $x = -\frac{8}{7}$

c. $x = -4$

22. $8x + 40 = 8$
a. $x = 7$
b. $x = 4$
c. $x = -5$
d. $x = -4$

d. $x = -4$

23. $2x - 3 = -15$
a. $x = -6$
b. $x = 6$
c. $x = -9$
d. $x = 9$

a. $x = -6$

24. $-5x + 6 = 26$
a. $x = 6.4$
b. $x = -6.4$
c. $x = 4$
d. $x = -4$

d. $x = -4$

25. $-7x + 3 = 11$

a. $x = -2$
b. $x = 2$
c. $x = \frac{8}{7}$
d. $x = -\frac{8}{7}$

a. $x = -\frac{8}{7}$

26. $-3x + 12 = 12$

a. $x = 0$
b. $x = -8$
c. $x = 3$
d. $x = 8$

a. $x = 0$

27. $7x - 4 = 2x + 26$

a. $x = 6$
b. $x = -6$
c. $x = 2.44$
d. $x = 5$

a. $x = 6$

28. $2x + 8 = 7x - 37$

a. $x = 5.8$
b. $x = 9$
c. $x = -9$
d. $x = -5.8$

b. $x = 9$

29. $3x - 5 = 9x + 13$

a. $x = 3$
b. $x = -3$
c. $x = \frac{2}{3}$
d. $x = -\frac{2}{3}$

b. $x = -3$

30. $8x - 6 = 3x - 26$

a. $x = -2.9$
b. $x = -4$
c. $x = 4$
d. $x = 2.9$

b. $x = -4$

31. $8x + 3 = -21 - 4x$

a. $x = -2$
b. $x = 4.5$
c. $x = 2$
d. $x = -4.5$

a. $x = -2$

32. $-7 - 6x = 21 - 2x$

a. $x = 7$
b. $x = 1.75$
c. $x = -7$
d. $x = -1.75$

c. $x = -7$

33. $0.5x - 6 = 0.2x$

a. $x = 20$
b. $x = -20$
c. $x = 8.57$
d. $x = -8.57$

a. $x = 20$

34. $0.7x - 7 = 0.3x - 5$

a. $x = 5$
b. $x = \frac{1}{2}$
c. $x = -5$
d. $x = -12$

a. $x = 5$

35. $\frac{2x}{3} - \frac{5}{3} = 3$

a. $x = -7$
b. $x = 2$
c. $x = -2$
d. $x = 7$

d. $x = 7$

40. $6(3x - 1) - 2x = 2(2x - 5) - 8$

a. $x = -1$
b. $x = 1$
c. $x = 2$
d. $x = -2$

a. $x = -1$

36. $\frac{3x}{4} + \frac{1}{4} = 4$

a. $x = -5$
b. $x = -\frac{17}{3}$
c. $x = 5$
d. $x = \frac{17}{3}$

c. $x = 5$

41. $9(2x - 6) - (x + 3) = 4x - 18$

a. $x = 4$
b. $x = -2$
c. $x = -3$
d. $x = 3$

d. $x = 3$

37. $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = 1$

a. $x = 24$
b. $x = 30$
c. $x = 18$
d. $x = \frac{1}{24}$

a. $x = 24$

42. $15x - 5(2x - 1) = 3(3x - 5)$

a. $x = 5$
b. $x = -4$
c. $x = 4$
d. $x = -5$

a. $x = 5$

38. $\frac{x}{6} + \frac{x}{5} = 11$

a. $x = 30$
b. $x = 36$
c. $x = 24$
d. $x = -30$

a. $x = 30$

43. $4(6 - x) - 2(3 - x) - 5 = 9(5 - 2x)$

a. $x = 1$
b. $x = 2$
c. $x = -1$
d. $x = -2$

b. $x = 2$

39. $\frac{2x}{3} - \frac{5}{2} = \frac{x}{4}$

a. $x = -6$
b. $x = -\frac{30}{11}$
c. $x = 6$
d. $x = 5$

c. $x = 6$

44. $3(4x - 3) - (x + 7) = 5(10 - x) + 2$

a. $x = 5$
b. $x = -5$
c. $x = -4$
d. $x = 4$

d. $x = 4$

45. $8(3x + 2) - 5(2x - 1) = 8 - (9 - 3x)$

a. $x = 1$
b. $x = -1$
c. $x = 2$
d. $x = -2$

d. $x = -2$

46. $50 - 5(x + 3) = 10(x + 2)$

a. $x = 1$
b. $x = -1$
c. $x = 0$
d. $x = 11$

a. $x = 1$

47. $\dfrac{3x+5}{4} - \dfrac{2x-1}{3} = 2$

a. $x = 5$
b. $x = 17$
c. $x = -17$
d. $x = 4$

a. $x = 5$

48. $7(x + 3) - 3(x - 2) = 16 - (2x - 3)$

a. $x = -\dfrac{3}{6}$
b. $x = \dfrac{3}{4}$
c. $x = \dfrac{4}{3}$
d. $x = -\dfrac{4}{3}$

d. $x = -\dfrac{4}{3}$

49. $8(1 - x) - 2(x + 1) = 3(2 - 2x)$

a. $x = 1$
b. $x = -6$
c. $x = 6$
d. $x = 0$

d. $x = 0$

50. $x(x - 15) - 3 = (x + 6)(x - 6) - 18x$

a. $x = 11$
b. $x = 10$
c. $x = -11$
d. $x = -12$

c. $x = -11$

51. $0.07x - 0.04 = -0.01x - 0.6$

a. $x = 8$
b. $x = 7$
c. $x = -7$
d. $x = -8$

c. $x = -7$

52. $0.045x + 0.02 = 0.075x - 0.01$

a. $x = -1$
b. $x = 1$
c. $x = 2$
d. $x = 0$

b. $x = 1$

53. $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{x}{8} = \dfrac{5}{4}$

a. $x = \dfrac{10}{11}$
b. $x = \dfrac{12}{11}$
c. $x = \dfrac{9}{11}$
d. $x = \dfrac{5}{6}$

a. $x = \dfrac{10}{11}$

54. $\dfrac{4x+13}{7} - 1 = \dfrac{3x-5}{10}$

a. $x = -6$
b. $x = -5$
c. $x = -4$
d. $x = 5$

b. $x = -5$

55. $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{x}{6} = 2$

a. $x = 3$
b. $x = 2$
c. $x = 6$
d. $x = 4$

d. $x = 4$

Las ecuaciones lineales como modelos matemáticos

A menudo es posible construir con ecuaciones un modelo que permita describir y resolver problemas enunciados en lenguaje verbal (es decir, en el que te comunicas todos los días). Para resolver problemas planteados en lenguaje verbal, problemas con enteros consecutivos y problemas de mezclas te recomendamos seguir los pasos descritos a continuación.

Sugerencias para modelar problemas mediante ecuaciones lineales

1. Lee el problema con atención para identificar las incógnitas y las cantidades conocidas.
2. Elige las letras que se utilizarán para representar las incógnitas del problema.
3. Expresa, mediante una ecuación, la relación que existe entre los datos del problema.
4. Encuentra el valor o los valores de las incógnitas de la ecuación que resulta del paso anterior.
5. Comprueba la solución.

Ejemplo 8

Resuelve los problemas siguientes mediante el planteamiento de una ecuación.

a. Ana es ocho años mayor que Carlos, pero hace tres años ella tenía el triple de edad que él. Determina la edad que hoy tiene cada uno de ellos.

Solución

Si x expresa la edad actual de Carlos, entonces tenemos lo siguiente:

- La expresión en términos de x que representa la edad actual de Ana, es $x + 8$.
- La expresión que representa la edad de Carlos hace tres años es $x - 3$.
- La expresión que representa la edad de Ana hace tres años es $x + 8 - 3 = x + 5$.
- La expresión que relaciona la edad de ambos hace tres años es la ecuación $x + 5 = 3(x - 3)$. Hay que resolverla para determinar la edad de Ana y de Carlos:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 3(x - 3) \\ x + 5 &= 3x - 9 \\ x - 3x &= -9 - 5 \\ -2x &= -14 \end{aligned}$$

Multiplicamos por (-1) ambos miembros de la ecuación anterior para obtener:

$$\begin{aligned} 2x &= 14 \\ x &= \frac{14}{2} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Carlos tiene 7 años; por tanto, la edad actual de Ana es $x + 8 = 7 + 8 = 15$ años.

b. Gloria es dos veces mayor que Gina. Dentro de 15 años, la suma de sus edades será 105 años. ¿Qué edad tienen actualmente?

Solución

Si x representa la edad de Gina, tenemos que:

- La expresión en términos de x que representa la edad de Gloria es $2x$.
- La expresión que representa la edad de Gina dentro de 15 años es $x + 15$.
- La expresión que representa la edad de Gloria dentro de 15 años es $2x + 15$.
- La expresión que representa la suma de las edades de ambas dentro de 15 años es la ecuación $(2x + 15) + (x + 15) = 105$.

Al eliminar signos de agrupación y resolver la ecuación resulta:

$$\begin{aligned} 2x + 15 + x + 15 &= 105 \\ 3x + 30 &= 105 \\ 3x &= 105 - 30 \\ 3x &= 75 \\ x &= \frac{75}{3} \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Gina tiene 25 años y Gloria 50 años.

Problemas con enteros consecutivos

Una de las modalidades que pueden adoptar los problemas que pueden resolverse mediante ecuaciones de primer grado es la de hallar enteros consecutivos, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 9

a. Determina tres números enteros consecutivos cuya suma sea 105.

Solución

Si x representa el número menor de dichos números, entonces:

- La expresión que representa el segundo número consecutivo es $x + 1$.
- La expresión que representa el tercer número consecutivo es $(x + 1) + 1$; o sea, $x + 2$.
- La expresión que representa la suma de los tres números consecutivos es la ecuación $x + (x + 1) + (x + 2) = 105$.

Eliminamos los signos de agrupación y al resolver la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned} x + x + 1 + x + 2 &= 105 \\ 3x + 3 &= 105 \\ 3x &= 105 - 3 \\ 3x &= 102 \\ x &= \frac{102}{3} \\ x &= 34 \end{aligned}$$

Los tres números enteros consecutivos que suman 105 son 34, 35 y 36.

Comprobación

$$\begin{aligned} 34 + 35 + 36 &= 105 \\ 105 &= 105 \end{aligned}$$

b. Determina tres números impares consecutivos, tales que seis veces el mayor sea ocho veces el menor disminuido en 18 unidades.

Solución

Si x representa el primer número impar consecutivo tenemos que:

- La expresión del segundo número impar consecutivo es $x + 2$.
- La expresión que representa el tercer impar consecutivo es $(x + 2) + 2$; o sea, $x + 4$.
- La expresión que relaciona al primer y tercer números consecutivos es la ecuación $6(x + 4) = 8x - 18$.
- Al eliminar signos de agrupación y resolver la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned} 6x + 24 &= 8x - 18 \\ 6x - 8x &= -18 - 24 \\ -2x &= -42 \end{aligned}$$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación anterior resulta:

$$(-2x)(-1) = (-42)(-1)$$

$$\begin{aligned} 2x &= 42 \\ x &= \frac{42}{2} \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Los números consecutivos buscados son 21, 23 y 25.

Comprobación

$$\begin{aligned} 6(25) &= 8(21) - 18 \\ 150 &= 168 - 18 \\ 150 &= 150 \end{aligned}$$

Problemas de mezclas

Otra modalidad que pueden adoptar los problemas verbales y que pueden modelarse mediante ecuaciones de primer grado es la de hallar qué porcentajes de sustancias han de usarse al preparar una mezcla, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 10

a. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar a 8 litros (l) de una solución salina al 12% y agua para obtener otra al 5%?

Solución

Una solución que se compone de sal al 5% y agua, significa que 5% de ella es sal y el resto es agua pura (o sea, la mezcla tiene 95% de agua pura).

La solución de este tipo de problemas se fundamenta en lo siguiente:

- El producto que resulta al multiplicar la cantidad de la solución por el porcentaje expresado en forma decimal es igual a la cantidad de sustancia pura de dicha solución.
- Al mezclar dos soluciones tenemos que:

La cantidad de sustancia pura en la primera solución	+	*La cantidad de sustancia pura en la segunda solución*	=	*La cantidad de sustancia pura en la mezcla*

Si en nuestro problema x representa la cantidad de agua pura que se requiere agregar a la primera solución, entonces:

- La cantidad de sal en la primera solución es $8(0.12) = 0.96$.
- La cantidad de sal en el agua pura que se va a agregar es cero, es decir, $x(0\%) = x(0) = 0$.
- La expresión que representa la cantidad de sal en la mezcla es $0.05(8 + x)$.

Como la cantidad de sal en la mezcla es igual a la suma de la cantidad inicial más la cantidad en el agua agregada, tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 0.96 + x(0) &= 0.05(8 + x) \\ 0.96 &= 0.4 + 0.05x \\ -0.05x &= 0.04 - 0.96 \\ -0.05x &= -0.56 \\ x &= \frac{-0.56}{-0.05} \\ x &= 11.2 \end{aligned}$$

Se deben agregar 11.2 litros de agua pura para obtener una solución salina al 5% y agua.

b. ¿Cuántos litros de una solución salina al 20% se deben agregar a 12 litros de una al 8% para obtener otra al 14%? Todas las soluciones son de sal y agua.

Solución

Sea x el número de litros de solución al 20% y agua. Para obtener la ecuación de este modelo observa la tabla siguiente

Tipo de solución	*Cantidad de sal*
20%	$0.2x$
8%	0.08(12)
(Mezcla) 14%	$(x + 12)(0.14)$

De acuerdo con la tabla anterior resulta la ecuación:

$$\begin{array}{ccccc} 0.2x & + & 0.08(12) & = & (x + 12)(0.14) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cantidad de sal agregada} & + & \text{cantidad inicial de sal} & = & \text{cantidad de sal en la mezcla} \end{array}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$0.2x + 0.96 = 0.14x + 1.68$$

Multipliquemos por 100 la ecuación anterior para obtener una equivalente a ella con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} 20x + 96 &= 14x + 168 \\ 20x - 14x &= 168 - 96 \\ 6x &= 72 \\ x &= \frac{72}{6} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Se deben agregar 12 litros de solución salina al 20% y agua.

c. ¿Cuántos kilogramos de café de \$5 se deben mezclar con 40 kilogramos de otro tipo de café, cuyo precio es de \$8, para obtener una mezcla que se venderá en \$7 cada kilogramo?

Solución

Este tipo de problemas con mezclas, donde intervienen precios en lugar de porcentajes, se resuelve considerando el hecho de que el ingreso monetario que se recibe por concepto de la venta del producto de la mezcla es igual a la suma de los ingresos que se percibirán por la venta de cada tipo de producto.

El ingreso se calcula multiplicando el precio unitario de cada artículo por la cantidad del mismo.

De acuerdo con lo anterior, con los datos del problema y considerando x como el número de kilogramos de café cuyo precio es de \$5, resulta la tabla siguiente:

Tipo de café	*Cantidad*	*Ingreso*
De \$8	40 kg	$8(40) = 320$
De \$5	x	$5x$
De \$7 (mezcla)	$40 + x$	$7(40 + x)$

De la tabla anterior obtenemos la ecuación:

$$
\begin{aligned}
320 + 5x &= 7(40 + x)\\
320 + 5x &= 280 + 7x\\
5x - 7x &= 280 - 320\\
-2x &= -40\\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{-40}{-2}\\
x &= 20
\end{aligned}
$$

Se deben mezclar 40 kilogramos de café de \$8 con 20 kilogramos de café de \$5 para que el precio por kilogramo de mezcla sea de \$7.

Comprobación

$$
\begin{aligned}
8(40) + 5(20) &= 7(40 + 20)\\
320 + 100 &= 7(60)\\
420 &= 420
\end{aligned}
$$

d. Un carnicero mezcla dos tipos de carne molida, una que cuesta \$40 el kilogramo y otra que cuesta \$48. Si la mezcla total pesa 6 kilogramos y su precio es de \$45, ¿de cuántos kilogramos de cada tipo de carne se integra la mezcla?

Solución

Si x representa el número de kilogramos de la carne molida de \$40 y z el número de kilogramos de la carne de \$48, entonces:

Tipo de carne	*Cantidad*	*Ingreso*
de \$40	x	$40x$
de \$48	$z = 6 - x$	$48(6 - x)$
de \$45(mezcla)	6	$45(6) = 270$

Nota:

$$
\begin{aligned}
z &= 6 - x, \text{ ya que}\\
x + z &= 6, \text{ luego}\\
z &= 6 - x
\end{aligned}
$$

De acuerdo con la tabla anterior resulta la ecuación:

$$40x + 48(6 - x) = 270$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$
\begin{aligned}
40x + 48(6 - x) &= 270\\
40x + 288 - 48x &= 270\\
-8x &= -18\\
x &= \frac{-18}{-8}\\
x &= 2.25
\end{aligned}
$$

Se deben mezclar 2.25 kilogramos de carne de \$40 con 3.75 kilogramos de carne de \$48 para obtener 6 kilogramos de carne de \$45.

Ejercicios 2

I. *Resuelve los problemas siguientes.* (*Elige la opción correcta.*)

1. Jorge es ocho años mayor que Carlos. Hace 16 años tenía el triple de edad que Carlos. ¿Cuál es la edad actual de Jorge?

a. 26 años
b. 28 años
c. 30 años
d. 27 años

b. 28 años

---

2. La señora Treviño tiene el doble de edad que su hijo. Hace nueve años, la suma de sus edades era de 30 años. ¿Cuál es su edad actual?

a. 30 años
b. 16 años
c. 32 años
d. 17 años
e. 34 años

c. 32 años

---

3. Mary es 15 años mayor que Juan. Hace cinco años tenía el doble de edad que él. ¿Cuál es la edad de Mary?

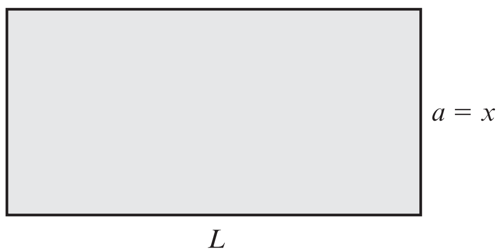
a. 37 años
b. 38 años
c. 32 años
d. 35 años

d. 35 años

---

4. Calcula el área de un rectángulo cuyo largo es cinco veces su ancho y cuyo perímetro es de 108 metros (m).

a. 405 m^2
b. 460 m^2
c. 395 m^2
d. 415 m^2



a. 405 m^2

---

5. Un cable de 120 pies de longitud se corta en cuatro tramos. Si cada tramo tiene el doble de longitud que el anterior, calcula la longitud del tramo más largo.

a. 70 pies
b. 68 pies
c. 72 pies
d. 64 pies

d. 64 pies

---

6. Un cable de 58 pies de largo se corta en cuatro tramos. Si cada tramo mide 5 pies de longitud más que el anterior, ¿cuál es la longitud del tramo mayor?
   a. 22 pies
   b. 20 pies
   c. 28 pies
   d. 24 pies

a. 22 pies

---

7. La suma de dos números es 72. Si el menor es la quinta parte del mayor, ¿cuál es el número menor?
   a. 14
   b. 12
   c. 15
   d. 10

b. 12

---

8. Una persona vendió elotes durante tres días. Si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó el tercer día si su ganancia total fue de $1330?
   a. $200
   b. $220
   c. $190
   d. $180

c. $190

---

9. Determina el producto de tres números consecutivos tales que tres veces el mayor sea igual a cuatro veces el menor disminuido en 19 unidades.
   a. 15 600
   b. 19 656
   c. 17 750
   d. 17 550

c. 17 750

---

10. Determina el producto de tres números pares consecutivos cuya suma sea 66.
    a. 10 560
    b. 7 980
    c. 12 140
    d. 15 600

a. 10 560

---

11. Se llena con metanol un tanque cilíndrico hasta un tercio de su capacidad. Si se le agregan 8 litros más, el nivel llega hasta la mitad del tanque. ¿Cuál es la capacidad del tanque?
    a. 56 litros
    b. 44 litros
    c. 50 litros
    d. 48 litros

d. 48 litros

---

12. Roberto obtuvo las calificaciones siguientes en sendos exámenes de biología: 73, 62, 58 y 64. ¿Qué calificación debe obtener en un próximo examen para que su promedio sea de 70?

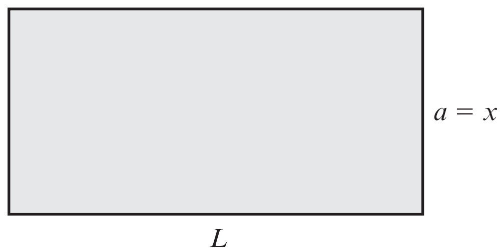
a. 90
b. 93
c. 94
d. 92

b. 93

---

13. Calcula el área de un rectángulo cuyo largo mide el triple que su ancho y cuyo perímetro es de 160 metros (m).

a. 1200 m^2
b. 972 m^2
c. 1083 m^2
d. 1323 m^2



a. 1200 m^2

---

14. Carlos gana 1.5 veces lo que gana José. Roberto gana 2.6 veces lo que gana Carlos y Miguel, el doble de lo que gana Roberto. Si Miguel gana \$39 000. ¿Cuánto gana Carlos?

a. \$7 500
b. \$5 000
c. \$8 250
d. \$5 500
e. \$8 700

a. \$7 500

---

15. ¿Cuántos litros de una solución salina al 20% deben agregarse a 20 litros de la misma solución al 12% para obtener otra igual al 16%?

a. 24
b. 18
c. 20
d. 25

c. 20

---

16. ¿Cuántos litros de desinfectante al 80% se deben mezclar con 80 litros de la misma sustancia al 50% para obtener otra igual al 60%?

a. 45
b. 40
c. 50
d. 36

b. 40

---

17. El ancho de una alberca mide la tercera parte de su largo. Determina su área a partir de este dato: su perímetro es de 104 metros.

a. 588 m^2
b. 675 m^2
c. 507 m^2
d. 432 m^2

c. 507 m^2

---

18. Mario gana el doble que Juan y Toño el triple que Mario. Si Toño gana $12 150, ¿cuánto gana Mario?

a. $4 050
b. $4 300
c. $5 070
d. $4 600

a. $4 050

---

19. Alejandro gana 1.4 veces lo que gana Raúl, mientras que Manuel gana el doble de lo que gana Alejandro. Si Manuel gana $7 000, ¿cuánto gana Alejandro?

a. $3 360
b. $3 780
c. $3 500
d. $3 640

c. $3 500

---

20. La edad de Juan es el triple que la de Luis y hace cinco años tenía el cuádruple de la de Luis. ¿Cuál es la edad de Juan?

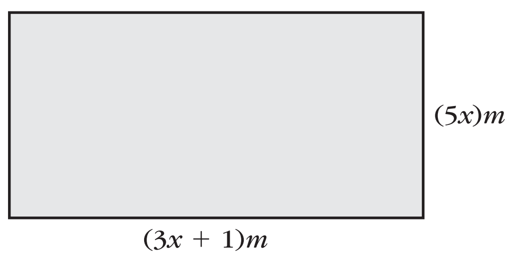
a. 42 años
b. 48 años
c. 39 años
d. 45 años

d. 45 años

---

21. El perímetro del rectángulo de la figura siguiente es de 50 metros (m). Calcula el área.

a. 240 m^2
b. 160 m^2
c. 120 m^2
d. 150 m^2



d. 150 m^2

---

22. La escala de la temperatura Farenheit se relaciona con la escala Celsius (C) mediante la ecuación °F = 1.8C + 32. ¿A cuántos grados Celsius equivalen 104 °F?

a. 38 °C
b. 40 °C
c. 42 °C
d. 45 °C

b. 40 °C

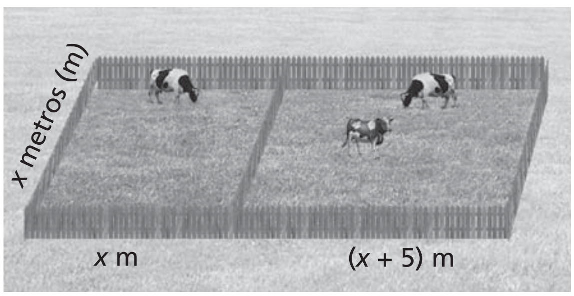
23. Un agricultor dispone de 240 metros de material para cercar un pastizal. Como un río colinda con uno de los lados de éste, sólo necesita cercar los otros tres lados. Calcula el área del pastizal si su largo debe medir el doble que su ancho.

a. 7400 m^2
b. 7600 m^2
c. 7800 m^2
d. 7200 m^2

d. 7200 m^2

24. Una persona dispone de 220 metros de cerca para forrar un corral como el que se muestra en la figura siguiente. Calcula el área.

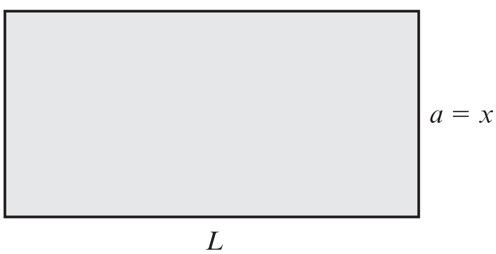
a. 1950 m^2
b. 2100 m^2
c. 1800 m^2
d. 1850 m^2



a. 1950 m^2

25. El perímetro de un rectángulo es de 42 metros, y su largo mide 5 metros más que su ancho. Calcula su área.

a. 126 m^2
b. 84 m^2
c. 104 m^2
d. 150 m^2



c. 140 m^2

26. Martha y Joaquín distan 160 metros entre sí. Si empiezan a caminar uno hacia el otro, al mismo tiempo y a velocidad promedio de 1.4 metros por segundo (m/s) y 1.8 m/s, respectivamente, ¿dentro de cuánto tiempo se encontrarán? [*Nota:* considera esta fórmula: Distancia (d) = velocidad promedio (v) por tiempo (t), es decir, $d = vt$.]

a. 48 s
b. 50 s
c. 55 s
d. 45 s

b. 50 s

---

27. A las 16:00 PM dos autos salen de un mismo lugar, uno hacia el Norte con una velocidad de 80 kilómetros por hora (km/h) y el otro hacia el Sur con una velocidad promedio de 96 km/h. ¿A qué hora estarán los autos separados una distancia de 440 km? (*Nota:* $d = vt$.)

a. 18:15 PM
b. 18:45 PM
c. 18:30 PM
d. 18:00 PM

c. 18:30 PM

---

28. ¿Cuántos litros de agua pura se deben agregar a 40 litros de una solución salina al 12% para obtener otra igual al 4%?

a. 80 litros
b. 90 litros
c. 70 litros
d. 60 litros

a. 80 litros

---

29. ¿Cuántos kilogramos de café de $8 se deben mezclar con 40 kilogramos (kg) de otro tipo de café de $5 para obtener una mezcla cuyo precio sea de $7 por kilogramo?

a. 70 kg
b. 90 kg
c. 80 kg
d. 75 kg

c. 80 kg

---

30. ¿Cuántos kilogramos de café cuyo precio es de $7.40 por kilogramo (kg) se deben mezclar con 20 kilogramos de otro tipo de café de $5.20 para obtener una mezcla cuyo precio sea de $6.00?

a. 10.5 kg
b. 11.4 kg
c. 12.5 kg
d. 9.5 kg

b. 11.4 kg

---

31. Sean A, B y C los ángulos interiores de un triangulo. Si B mide el doble que A y el ángulo C mide 1.5 veces B, ¿cuánto mide el ángulo C? (*Nota:* en un triángulo, $A + B + C = 180°$.)

a. 75º
b. 80º
c. 90º
d. 85º

c. 90°

32. Juan pesa 98 kilogramos (kg) y su médico lo somete a una dieta que le permite bajar 3 kg por mes. ¿Cuál será el peso (w) de Juan después de x meses?

a. $w = 98 - 3 - x$
b. $w = 3x - 98$
c. $w = 95x$
d. $w = 98 - 3x$
e. $w = 98 + 3x$

d. $w = 98 - 3x$

33. Un avión debe recorrer N kilómetros. Si ha recorrido M kilómetros, ¿qué distancia (d) le falta recorrer?

a. $d = (N + M)$ kilómetros
b. $d = (M - N)$ kilómetros
c. $d = (N - M)$ kilómetros
d. Ninguno de los anteriores

c. $d = (M - N)$ kilómetros

34. Escribe en una ecuación el enunciado siguiente: "Un número aumentado en 6% es igual a 840".

a. $x + 6\% = 840$
b. $x + 0.06 = 840$
c. $x + \frac{3}{50} = 840$
d. $x + 0.06x = 840$

d. $x + 0.06x = 840$

35. Escribe en una ecuación el enunciado siguiente: "La mitad de un número más un tercio del mismo es igual a 150".

a. $2x + 3x = 150$
b. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = 150$
c. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 150$
d. Ninguno de los anteriores

c. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 150$

36. Manuel debe juntar d dólares para pagar el enganche de un automóvil. Si ha reunido N dólares, ¿cuántos dólares le faltan?

a. $x = N + d$
b. $x = d - N$
c. $x = N - d$

b. $x = d - N$

37. Rosa ha gastado $\frac{7}{9}$ de un sueldo mensual. Si le quedan \$4000, ¿cuánto gana al mes?

a. \$20 000
b. \$18 000
c. \$17 000
d. \$16 000

b. \$18 000

38. Un padre deja a su hijo mayor $\frac{1}{4}$ de su fortuna, al siguiente $\frac{2}{5}$ de la misma y al menor los \$140 000 que restan. Calcula el monto total de la herencia.

a. \$400 000
b. \$380 000
c. \$420 000
d. \$460 000

a. \$400 000

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son las que incluyen fracciones y al menos uno de sus denominadores es una expresión que contiene la incógnita.

Para resolver una ecuación racional primero se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador de todos los denominadores que aparecen en ella, con el fin de eliminarlos, y después se resuelve la ecuación resultante aplicando el método que ya estudiamos.

La expresión por la que se multiplican ambos miembros de la ecuación resultante no siempre equivale a la inicial; por ello, las raíces de la expresión final pueden ser diferentes de la original. Así, al resolver ecuaciones racionales se debe comprobar que los resultados obtenidos no sean raíces extrañas.

Ejemplo 11

a. Determina el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{15}{x} + \frac{9x - 7}{x + 2} = 9$$

Solución

Primero, la x debe ser diferente de cero y de -2.

El mínimo común denominador es $x(x + 2)$; por tanto, ambos miembros de la ecuación se multiplican por esta expresión, de lo que resulta:

$$x(x + 2)\left[\frac{15}{x} + \frac{9x - 7}{x + 2}\right] = x(x + 2)9$$

$$\begin{aligned}
15(x+2)+x(9x-7) &= 9x(x+2)\\
15x+30+9x^2-7x &= 9x^2+18x\\
8x+9x^2+30 &= 9x^2+18x\\
8x+9x^2-9x^2-18x &= -30\\
-10x &= -30\\
x &= \frac{-30}{-10}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Comprueba que $x = 3$ no sea raíz extraña de la ecuación original.

b. Resuelve la ecuación

$$\frac{2x}{x-4}-\frac{8}{x-4}=4$$

Solución

El mínimo común denominador es $x - 4$; por tanto, ambos miembros de la ecuación se multiplican por esta expresión, de lo que resulta:

$$\begin{aligned}
(x-4)\left[\frac{2x}{x-4}-\frac{8}{x-4}\right] &= 4(x-4)\\
2x-8 &= 4x-16\\
2x-4x &= -16+8\\
-2x &= -8\\
x &= \frac{-8}{-2}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

La solución $x = 4$ es una raíz extraña respecto a la ecuación original porque anula el denominador $x - 4$ y la división entre cero no está definida.

Ejercicios 3

I. *Resuelve las ecuaciones racionales siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$

a. $x = \frac{7}{10}$

b. $x = \frac{10}{7}$

c. $x = 1.5$

d. $x = \frac{10}{9}$

b. $x = \frac{10}{7}$

2. $\frac{5}{x-2}=\frac{4}{x-1}$

a. $x = -3$

b. $x = 3$

c. $x = 4$

d. $x = -5$

a. $x = -3$

3. $\dfrac{9}{x-2} = \dfrac{8}{2x+1}$

a. $x = 3$
b. $x = -3$
c. $x = -2.5$
d. $x = 2.5$

c. $x = -2.5$

4. $\dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{x} - 3 = \dfrac{6}{x}$

a. $x = -\dfrac{1}{2}$
b. $x = -\dfrac{1}{3}$
c. $x = \dfrac{1}{2}$
d. $x = \dfrac{1}{3}$

b. $x = -\dfrac{1}{3}$

5. $\dfrac{x-1}{x+3} - \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3}{x^2+3x}$

a. $x = 6$
b. $x = 5$
c. $x = 7$
d. $x = 4$

a. $x = 6$

6. $\dfrac{x}{4x-12} - \dfrac{x-4}{x-3} = \dfrac{1}{8}$

a. $x = -5$
b. $x = -4$
c. $x = 6$
d. $x = 5$

d. $x = 5$

7. $\dfrac{2x}{x-3} - 1 = \dfrac{x}{x+2}$

a. $x = -3$
b. $x = -\dfrac{3}{4}$
c. $x = 3$
d. $x = \dfrac{3}{4}$

b. $x = -\dfrac{3}{4}$

8. $\dfrac{5}{y-1} + \dfrac{3}{y-3} = \dfrac{6}{y-3}$

a. $y = 6$
b. $y = -1.7$
c. $y = 1.7$
d. $y = -6$

a. $y = 6$

9. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4x}$

a. $x = -3$
b. $x = -4$
c. $x = -5$
d. $x = 5$

c. $x = -5$

10. $\dfrac{5}{x-4} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{x^2-2x-8}$

a. $x = -3$
b. $x = 3$
c. $x = -4$
d. $x = 4$

a. $x = -3$

Ecuaciones racionales como modelos matemáticos

Veamos a continuación problemas de la vida real cuyo modelo es una ecuación racional.

Ejemplo 12

a. Un albañil A puede pintar una casa en tres días y otro albañil B puede hacerlo en seis días. ¿Cuánto tiempo tardarían en realizar el trabajo los dos juntos?

Solución

Si x representa el tiempo en días que tardarán en pintar la casa trabajando juntos, se tiene lo siguiente.

En un día, el albañil A realiza $\frac{1}{3}$ del trabajo mientras que B realiza $\frac{1}{6}$ del mismo. Si los dos trabajaran juntos, terminarían $\frac{1}{x}$ del trabajo en un día; por tanto, obtendríamos la ecuación:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $6x$ queda:

$$6x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=6x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2x + x = 6$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Ambos albañiles tardarán dos días en pintar la casa juntos.

b. Una tubería puede llenar un tanque en 10 horas, en tanto que otra puede vaciarlo en 15 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará ese tanque si ambas tuberías se abren simultáneamente?

Solución

En una hora, la primera tubería llena $\frac{1}{10}$ del volumen del tanque y la segunda vacía $\frac{1}{15}$ del volumen en el mismo tiempo.

Si x representa el número total de horas que deben transcurrir para que se llene el tanque, entonces $\frac{1}{x}$ es el volumen del tanque, que se llena en una hora cuando ambas tuberías están abiertas simultáneamente; luego:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{x}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por el mínimo común múltiplo (MCM), que es $(30x)$, resulta:

$$30x\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)=30x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3x - 2x = 30$$

$$x = 30$$

Cuando las dos tuberías se abren al mismo tiempo el tanque se termina de llenar en 30 horas.

Ejercicios 4

I. *Resuelve los problemas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. Un albañil puede terminar de pintar una casa en cuatro días y otro en tres. ¿Cuánto tiempo tardarán en pintar la casa si trabajan juntos?

a. 1.7 días
b. 1.5 días
c. 1 día
d. 12 horas

a. 1.7 días

2. Juan puede efectuar un trabajo en 20 minutos. Si trabaja en equipo con Luis, tardarían 12 minutos. ¿En cuánto tiempo puede Luis realizar el trabajo?

a. 35 minutos
b. 25 minutos
c. 40 minutos
d. 30 minutos

d. 30 minutos

3. Una llave puede llenar un tanque en 10 minutos, mientras que otra requiere 8 minutos para hacerlo. Una vez lleno el tanque, la tubería del desagüe tarda 15 minutos en vaciarlo. Si las dos llaves están abiertas, así como la tubería del desagüe, ¿en cuánto tiempo se llenará el tanque?

a. 5 minutos
b. 6.3 minutos
c. 7 minutos
d. 5.6 minutos

b. 6.3 minutos

4. Una alberca tiene dos tubos de alimentación. Uno termina de llenar la piscina en cuatro horas (h), mientras que el otro tarda seis horas en hacerlo. Si una vez llena la alberca el tubo de desagüe termina de vaciarla en tres horas, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse si están abiertos los dos tubos y el desagüe?

a. 10 h
b. 14 h
c. 12 h
d. 11 h

c. 12 h

5. Una alberca tiene tres tubos de alimentación, *A, B* y *C,* respectivamente. El tubo *A* tarda cuatro horas (h) en llenar la piscina, el tubo *B,* nueve horas, y el *C,* 12 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la alberca si están abiertos los tres tubos a la vez?

a. 2.25 h
b. 2 h
c. 3 h
d. 1.75 h

a. 2.25 h

6. Lucy tarda 90 minutos en podar el césped. Si ella y su hermana trabajan juntas, tardan 36 minutos en realizar el trabajo. ¿Cuánto tiempo requerirá su hermana para podar ella sola el césped?

a. 50 minutos
b. 54 minutos
c. 60 minutos
d. 65 minutos

c. 60 minutos

7. Una alberca olímpica tiene tres tubos de alimentación. El primero tarda 30 horas (h) en llenarla; el segundo, 40 horas, y el tercero, un día. Si las tres llaves se abren simultáneamente, ¿cuántas horas se necesitará para llenar la alberca?

a. 9.5 h
b. 8.6 h
c. 10.5 h
d. 10 h

d. 10 h

Ecuaciones radicales de la forma $\sqrt{ax + b} = c$

Una ecuación con radicales es aquella en la que la incógnita aparece en el radicando de un radical; por ejemplo, $\sqrt{x + 8} = 16$.

Para resolver ecuaciones con radicales hay que despejar uno de los radicales aislándolo en uno de los miembros de la ecuación, en caso de ser necesario. Luego deben elevarse ambos miembros de la ecuación a una potencia igual al índice del radical, lo que permitirá que desaparezca el radical despejado. Este proceso se repite hasta que se hayan eliminado todos los radicales presentes y entonces se resuelve la ecuación como ya hemos estudiado.

Al resolver la ecuación final se debe verificar que las raíces no sean extrañas respecto a la ecuación original, pues como recordarás, elevar ambos miembros de una ecuación a una misma potencia no siempre da como resultado una ecuación equivalente a la original.

Ejemplo 13

a. Resuelve la ecuación $\sqrt{x + 3} = 3$

Solución

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación resulta:

$$\left(\sqrt{x + 3}\right)^2 = (3)^2$$

$$x + 3 = 9$$
$$x = 9 - 3$$
$$x = 6$$

Comprobación

$$\sqrt{x + 3} = 3$$

$$\sqrt{6 + 3} = 3$$

$$\sqrt{9} = 3$$
$$3 = 3$$

b. Resuelve la ecuación $\sqrt{5x-4} = 6$.

Solución

Elevemos ambos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\left[\sqrt{5x-4}\right]^2 = 6^2$$
$$5x - 4 = 36$$
$$5x = 36 + 4$$
$$5x = 40$$
$$x = \frac{40}{5}$$
$$x = 8$$

Comprobación

$$\sqrt{5x-4} = 36$$
$$\sqrt{5(8)-4} = 6$$
$$\sqrt{40-4} = 6$$
$$\sqrt{36} = 6$$
$$6 = 6$$

c. Resuelve la ecuación $3\sqrt{x-5} + 8 = 11$.

Solución

Antes de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación debes despejar el radical

$$3\sqrt{x-5} + 8 = 11$$
$$3\sqrt{x-5} = 11 - 8$$
$$3\sqrt{x-5} = 3$$
$$\sqrt{x-5} = \frac{3}{3}$$
$$\sqrt{x-5} = 1$$

Ahora ya puedes elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación resultante

$$\left[\sqrt{x-5}\right]^2 = 1^2$$
$$x - 5 = 1$$
$$x = 1 + 5$$
$$x = 6$$

Comprobación

$$3\sqrt{x-5} + 8 = 11$$
$$3\sqrt{6-5} + 8 = 11$$
$$3\sqrt{1} + 8 = 11$$
$$11 = 11$$

Ejercicios 5

I. *Resuelve las ecuaciones con radicales siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $\sqrt{2x+3}=5$

a. $x = 14$
b. $x = 3.5$
c. $x = 11$
d. $x = 6.5$

c. $x = 11$

2. $\sqrt{3x+4}=5$

a. $x = 9.6$
b. $x = 6$
c. $x = 8$
d. $x = 7$

d. $x = 7$

3. $2\sqrt{y+7}-3=5$

a. $y = 9$
b. $y = 23$
c. $y = 1$
d. $y = 15$

a. $y = 9$

4. $\sqrt{5y-1}-8=-1$

a. $y = 10$
b. $y = 3$
c. $y = 9.6$
d. $y = 11$

a. $y = 10$

5. $\sqrt{6x-3}=3$

a. $x = 0$
b. $x = 1$
c. $x = 2$
d. $x = 6$

c. $x = 2$

6. $3+\sqrt{3-2x}=8$

a. $x = -11$
b. $x = 14$
c. $x = 11$
d. $x = -12$

a. $x = -11$

7. $\sqrt{6-x}-2=1$

a. $x = -3$
b. $x = 3$
c. $x = 5$
d. $x = -5$

a. $x = -3$

8. $\sqrt{9-x}=0$

a. $x = \phi$
b. $x = 9$
c. $x = -9$
d. $x =$ ninguno de los anteriores

b. $x = 9$

9. $\sqrt{5x+4}=4$

a. $x = 2.8$
b. $x = 2.6$
c. $x = 2.4$
d. $x = 2.5$

c. $x = 2.4$

10. $5\sqrt{2x-1}=20$

a. $x = 7.5$
b. $x = 9.5$
c. $x = 8$
d. $x = 8.5$

d. $x = 8.5$

Ecuaciones con valor absoluto de la forma $|ax + b| = c$

Recuerda que dado un número real a, su valor absoluto (que, como recordarás, se representa con $|a|$ es a, si es positivo, $-a$ si a es negativo o cero si $a = 0$.

Así,

$$|8| = 8$$
$$|-8| = -(-8) = 8$$
$$|0| = 0$$

Si se tiene la ecuación $|a| = 9$, entonces su conjunto solución es $S = \{9, -9\}$, ya que $|9| = 9$ y $|-9| = 9$.

Si se tiene la ecuación $|2x - 3| = 9$, se puede efectuar el siguiente cambio de variable:

Sea $a = 2x - 3$. De ello resulta $|a| = 9$, o sea, $a = 9$ o $a = -9$, pero en virtud de que $a = 2x - 3$, resultan las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{rcr} 2x - 3 = 9 & \text{o} & 2x - 3 = -9 \\ 2x = 9 + 3 & \text{o} & 2x = -9 + 3 \\ 2x = 12 & \text{o} & 2x = -6 \\ x = \dfrac{12}{2} & \text{o} & x = \dfrac{-6}{2} \\ x = 6 & \text{o} & x = -3 \end{array}$$

El conjunto solución de la ecuación se representa así:

$$S = \{-3, 6\}$$

Si tenemos una ecuación con valor absoluto de la forma $|ax + b| = c$, donde $a \neq 0$ y c es una constante mayor o igual que cero, para determinar su conjunto solución se resuelven las ecuaciones $ax + b = c$ y $ax + b = -c$.

Los valores de x que las satisfacen son los elementos del conjunto solución de la ecuación original. En caso de que el término constante c sea un número negativo, la ecuación no tiene solución, ya que el valor absoluto de un número es siempre mayor o igual que cero.

Ejercicios 6

I. *Resuelve las ecuaciones con valor absoluto siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $S = |x - 5| = 3$

a. $S = \{-2, 8\}$
b. $S = \{2, 8\}$
c. $S = \{2, -8\}$
d. $S = \{-2, -8\}$

b. $S = \{2, 8\}$

2. $S = |2x - 3| = -7$

a. $S = \{-2\}$
b. $S = \{2, -5\}$
c. $S = \{-2, -5\}$
d. ϕ

d. ϕ

3. $|4x - 9| = 3$

a. $S = \{1, 5, 3\}$
b. $S = \{-1, 5, -3\}$
c. $S = \{-1, 5, 3\}$
d. $S = \{-3, 1, 5\}$

d. $S = \{-3, 1, 5\}$

4. $|2x + 3| = 9$

a. $S = \{-6, 3\}$
b. $S = \{-3, 6\}$
c. $S = \{3, 6\}$
d. $S = \{-3, -6\}$

a. $S = \{-6, 3\}$

5. $|x - 11| = 0$

a. $S = \{-11, 11\}$
b. $S = \{-11\}$
c. $S = \{11\}$
d. ϕ

c. $S = \{11\}$

6. $|5x - 4| = 10$

a. $S = \{1.2, -2.8\}$
b. $S = \{-1.2, -2.8\}$
c. $S = \{-1.2, 2.8\}$
d. $S = \{1.2, 2.8\}$

c. $S = \{-1.2, 2.8\}$

7. $|7 - 2x| = 9$

a. $S = \{-8, 1\}$
b. $S = \{-1, 8\}$
c. $S = \{-1, -8\}$
d. $S = \{1, 8\}$

b. $S = \{-1, 8\}$

8. $|5x + 7| = 23$

a. $S = \{-6, 3.2\}$
b. $S = \{-3.2, -6\}$
c. $S = \{-3.2, 6\}$
d. $S = \{3.2, 6\}$

a. $S = \{-6, 3.2\}$

9. $|3x - 9| = 0$

a. $S = \{3\}$
b. $S = \{-3\}$
c. $S = \{-3, 3\}$
d. $S = \phi$

a. $S = \{3\}$

10. $|15 - 3x| = 6$

a. $S = \{-7, -3\}$
b. $S = \{-3, 7\}$
c. $S = \{-7, 3\}$
d. $S = \{3, 7\}$

d. $S = \{3, 7\}$

11. $|6 - x| = 0$

a. ϕ
b. $S = \{-6, 6\}$
c. $S = \{-6\}$
d. $S = \{6\}$

d. $S = \{6\}$

12. $|x - 4| = -2$

a. $S = \{2, 6\}$
b. $S = \{-2, -6\}$
c. ϕ
d. $S = \{-2, 2\}$

c. ϕ

Evaluación

I. *Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $8x - 3(2x - 4) = 18$

a. $x = 2$
b. $x = 4$
c. $x = -2$
d. $x = -3$
e. $x = 3$

e. $x = 3$

2. $13 - 4(5x + 1) = 3(7 - 5x) - 15$

a. $x = 0.6$
b. $x = \frac{2}{5}$
c. $x = \frac{3}{4}$
d. $x = 0.2$
e. $x = \frac{4}{5}$

a. $x = 0.6$

3. $\frac{9}{4}x + 7 = \frac{1}{2} - x$

a. $x = 2$
b. $x = 1$
c. $x = -2$
d. $x = -1$
e. $x = 4$

c. $x = -2$

4. Evalúa la expresión

$2x^2 + 9x - 40$ si $\frac{x+1}{5} - \frac{x-6}{3} = \frac{37}{15}$

a. $x = -2$
b. $x_2 = 2$
c. $x = -3$
d. $x = 3$
e. $x = -1$

5. $\frac{9}{x-2} = \frac{8}{2x+1}$

a. $x = -\frac{5}{2}$
b. $x = \frac{5}{2}$
c. $x = \frac{3}{2}$
d. $x = -\frac{3}{2}$
e. $x = 20.25$

a. $x = -\frac{5}{2}$

6. $\frac{3}{x} + \frac{1}{x} = 8$

a. $x = 2$
b. $x = \frac{1}{3}$
c. $x + \frac{1}{4}$
d. $x = \frac{1}{2}$
e. $x = \frac{3}{2}$

d. $x = \frac{1}{2}$

7. $-\frac{4}{8}=\frac{10}{x}$

a. $x = -20$
b. $x = 75$
c. $x = -75$
d. $x = 20$

a. $x = -20$

10. $|x - 4| = -2$

a. $S = \{2, 6\}$
b. $S = \{-2, -6\}$
c. ϕ
d. $S = \{2, -6\}$

c. ϕ

8. $\frac{8}{x-2}-\frac{x}{x-2}=5$

a. $x = 3$
b. $x = -3$
c. $x = 4$
d. $x = -1$
e. $x =$ raíz extraña

a. $x = 3$

11. $|9 - 2x| = 5$

a. $S = \{2, 7\}$
b. $S = \{3, 5\}$
c. $S = \{-2, 7\}$
d. $S = \{-2, -7\}$
e. $S = \{2, -7\}$

a. $S = \{2, 7\}$

9. $|x - 5| = 0$

a. $S = \{5\}$
b. $S = \{-5\}$
c. $S = \{-5, 5\}$
d. ϕ

a. $S = \{5\}$

12. $\sqrt{3x-2}-7=3$

a. $x = 34$
b. $x = 30$
c. $x = 27$
d. $x = 31$
e. $x = 29$

a. $S = 34$

II. *Despeja la literal que se indica en las ecuaciones siguientes. (Elige la opción correcta.)*

13. Despeja la literal w en la ecuación $\frac{ab}{w}=k$.

a. $w=\frac{k}{ab}$
b. $w = abk$
c. $w=\frac{ab}{k}$
d. $w = ab -$

d. $w=\frac{ab}{k}$

14. Despeja la literal y en la ecuación $5ay - gt = K$.

a. $y=\frac{K-gt}{5a}$
b. $y = K + gt - 5a$
c. $y = K + gt + 5a$
d. $y=\frac{K+gt}{5a}$

d. $y=\frac{K+gt}{5a}$

III. *Resuelve los problemas de aplicación siguientes, en los que el modelo matemático es una ecuación lineal. (Elige la opción correcta.)*

15. La suma de dos números es 68. Si uno es 20 unidades mayor que el otro, ¿cuál es el número mayor?

a. 44
b. 46
c. 48
d. 47

a. 44

16. Un cable de 186 pies de longitud se corta en cuatro tramos. Si cada tramo tiene tres pies de longitud más que el anterior, calcula la longitud del tramo mayor.

a. 84 pies
b. 58 pies
c. 51 pies
d. 93 pies

c. 51 pies

17. La suma de tres números consecutivos es 123. Determina el número que resulta al restar el mayor de la suma de los otros dos.

a. 43
b. 36
c. 39
d. 46
e. 40

c. 39

18. ¿Cuántos litros de una solución desinfectante al 12% deben mezclarse en 30 litros de la misma solución al 46% para obtener otra al 24%?

a. 55 litros
b. 50 litros
c. 60 litros
d. 46 litros
e. 48 litros

a. 55 litros

19. ¿Cuántos kilogramos de café de $8.00 se deben mezclar con 40 kilogramos (kg) de otro de $5.00 para obtener una mezcla cuyo precio es de $7.00?

a. 90 kg
b. 80 kg
c. 85 kg
d. 78 kg

b. 80 kg

IV. *Resuelve los siguientes problemas de aplicación donde el modelo es una ecuación racional. (Elige la opción correcta.)*

20. Un albañil puede terminar de pintar una casa en cuatro días y otro en seis días. ¿En cuánto tiempo terminarían el trabajo si lo hicieran juntos?

a. 2.4 días
b. 3.2 días
c. 1.8 días
d. 2.9 días

a. 2.4 días

---

21. Ana puede limpiar su casa en tres horas, en tanto que su hermana puede hacerlo en cuatro horas. Carlos, el hermano menor, puede dejarla completamente sucia en seis horas. Si las hermanas juntas limpian la casa y, al mismo tiempo, Carlos juega, ¿en cuánto tiempo quedará limpia la casa?

a. 2 horas
b. 2.4 horas
c. 3 horas
d. 3.5 horas

b. 2.4 horas

12

Razones, proporciones y porcentajes

Razones

En la solución de problemas de la vida real a menudo hay que comparar dos cantidades, es decir, determinar cuántas veces una contiene a la otra.

Matemáticamente, comparar las cantidades significa dividir la magnitud de una entre la magnitud de la otra y el resultado de dicha comparación recibe el nombre de *razón*.

La razón entre dos cantidades a y b puede representarse de las formas siguientes:

$$a{:}b, \quad \frac{a}{b} \quad \text{o bien,} \quad a \div b,$$

donde b es diferente de cero. La notación $a{:}b$ se lee como "a es a b". Por ejemplo, si en un salón de clases hay 12 hombres y 4 mujeres, la razón de hombres a mujeres es 12:4, $\frac{12}{4}$ o $12 \div 4 = 3$. Ello significa que en el salón hay tres hombres por cada mujer.

Asimismo, la razón de mujeres a hombres es 4:12, es decir, $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, lo cual significa que por cada mujer hay tres hombres.

El primer término de una razón se llama *antecedente* y el segundo, *consecuente*. Así, en la razón 7:6, el antecedente es 7 y el consecuente es 6.

Al comparar magnitudes de la misma naturaleza deben expresarse en las mismas unidades de medición. Por ejemplo, para comparar 10 onzas con 10 libras se requiere expresar ambas cantidades en onzas o en libras.

Ejemplo 1

Encuentra la razón de 80 centavos a 4 pesos.

Solución

Primero hay que convertir los pesos en centavos:

$$\begin{aligned} 1 \text{ peso} &= 100 \text{ centavos,} \\ \text{luego} \quad 4 \text{ pesos} &= 400 \text{ centavos} \end{aligned}$$

La razón de 80 centavos a 4 pesos es igual a:

$$\frac{80 \text{ centavos}}{400 \text{ centavos}} = \frac{1}{5} = 1 \div 5 = 1:5$$

Las razones como modelos matemáticos

A continuación analizaremos algunos ejemplos en los que el modelo matemático es una razón.

Ejemplo 2

a. En una escuela, la razón de alumnos respecto a las alumnas es de 4:3. Si en la escuela hay 1400 estudiantes, ¿cuántos alumnos hay en la escuela?

Solución

La razón de 4:3 es numéricamente equivalente a la fracción $\frac{4}{3}$. Esta fracción es la simplificación de otra que se obtiene al dividir la cantidad de hombres entre la cantidad de mujeres, es decir:

$$\frac{\text{cantidad de hombres}}{\text{cantidad de mujeres}} = \frac{4}{3}$$

De acuerdo con lo anterior, al simplificar la fracción original se canceló un factor común al numerador y denominador de la fracción original. Si representamos ese factor común con la literal x, tenemos:

$$\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

es decir, la cantidad de hombres en términos de x es igual a $4x$, y la cantidad de mujeres es igual a $3x$; por consiguiente:

$$\begin{aligned} 4x + 3x &= 1400 \\ 7x &= 1400 \\ x = \frac{1400}{7} &= 200 \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de hombres es $4(200) = 800$.

b. El largo y el ancho de un terreno rectangular están a la razón de 9:4. El perímetro del terreno es de 2080 metros (m). Determina la longitud de su largo y ancho.

Solución

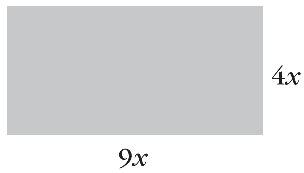
La razón 9:4 es igual a $\frac{9}{4}$. Esta fracción resulta al simplificar otra que se obtiene al dividir la longitud del largo entre la del ancho.

Si x representa el factor común del numerador y del denominador de la fracción original, tenemos

$$\frac{9}{4} = \frac{9x}{4x}, \quad \text{o sea}$$

$$9x = \text{longitud del largo}$$
$$4x = \text{longitud del ancho}$$

Por tanto, de acuerdo con la figura siguiente, el perímetro del terreno es $2(9x) + 2(4x)$



De esta manera

$$\begin{aligned} 18x + 8x &= 2080 \\ 26x &= 2080 \\ x &= \frac{2080}{26} \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \text{Largo} &= 9(80) = 720 \text{ m} \\ \text{Ancho} &= 4(80) = 320 \text{ m} \end{aligned}$$

Ejercicios 1

I. *Resuelve los siguientes problemas de razones. (Elige la opción correcta.)*

1. José contestó correctamente 35 de 50 preguntas de un examen. ¿Cuál es la razón de respuestas correctas al número total de preguntas?

a. $\frac{2}{5}$ *b.* $\frac{1}{2}$ *c.* $\frac{7}{10}$ *d.* $\frac{9}{10}$

c. $\frac{7}{10}$

2. Encuentra la razón de 20 centavos de dólar a 3 dólares.

a. $\frac{1}{15}$ *b.* $\frac{1}{5}$ *c.* $\frac{2}{15}$ *d.* $\frac{4}{15}$

b. $\frac{1}{5}$

3. Esteban contestó correctamente 12 de 18 preguntas de su examen de física y 14 preguntas de 20 de su examen de inglés. ¿En qué examen obtuvo mejor calificación?

a. En el de física
b. En el de inglés

4. Un grupo de biólogos pescó 24 carpas y 36 lobinas. ¿Cuál es la razón de lobinas a carpas?

a. $\frac{2}{3}$ *b.* $\frac{3}{2}$ *c.* $\frac{4}{3}$ *d.* $\frac{6}{5}$

b. $\frac{3}{2}$

5. En una escuela la cantidad de alumnos de primer año respecto a los de segundo es de 4:3. Si en la escuela hay 3 500 alumnos en total, ¿cuántos de ellos están en segundo año?

a. 1 400
b. 1 600
c. 1 750
d. 1 500

d. 1 500

6. Una gasolinera encuentra que el consumo de gasolina Magna excede la compra de gasolina Premium en una proporción de 9:5. La cuota mensual de la gasolinera es de 28 000 litros. ¿Cuántos litros de gasolina Magna deben ordenarse para que la cuota conserve esta razón?

a. 10 000
b. 20 000
c. 18 000
d. 16 000

c. 18 000

7. El largo y el ancho de un rectángulo están razón de 7:4. Su perímetro es de 550 pies. Determina el área del rectángulo.

a. 17 500 pies^2
b. 20 600 pies^2
c. 15 400 pies^2
d. 19 000 pies^2

a. 17 500 pies^2

---

8. Los lados de un triangulo están a la razón de 10:7:6. Si un perímetro es de 2185 centímetros (cm), ¿cuál es la longitud del lado mayor?

a. 920 cm
b. 980 cm
c. 900 cm
d. 950 cm

d. 950 cm

---

9. Los ángulos interiores de un triángulo están a la razón 5:4:3. Halla la medida del ángulo menor.

a. 40º
b. 45º
c. 48º
d. 36º

b. 45°

---

10. El largo y el ancho de un rectángulo están a la razón de 9:4. Si su perímetro es de 2080 metros (m), halla la longitud del ancho.

a. 720 m
b. 320 m
c. 760 m
d. 300 m

b. 320 m

Proporciones

Una *proporción* es una expresión que indica que dos razones son iguales; por ejemplo, 4:5 = 12:15, $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$, etcétera.

Si tenemos la proporción $a:b = c:d$, los términos a y d se llaman *extremos*, mientras que b y c son sus *medios*. La notación se lee "a es a b como c es a d". Por citar un caso, en la proporción 4:7 = 32:56 los términos extremos son 4 y 56, en tanto que los medios son 7 y 32.

Propiedades de las proporciones

La propiedad fundamental de las proporciones establece que el producto de los extremos de una proporción es igual al producto de sus medios.

De acuerdo con lo anterior, las razones $a:b$ y $c:d$ son una proporción si y sólo si $ad = bc$.

A continuación demostraremos la propiedad fundamental. Para ello supondremos que los términos que son denominadores son distintos de cero.

Demostración

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la proporción anterior por el producto bd resulta:

$$\cancel{b}d\left(\frac{a}{\cancel{b}}\right) = b\cancel{d}\left(\frac{c}{\cancel{d}}\right),$$

de donde al simplificar resulta $ad = bc$, lo que deseábamos demostrar

$$a:b = c:d \quad \text{si y sólo si} \quad ad = bc$$

De la propiedad fundamental de las proporciones y de las propiedades de las ecuaciones se derivan las propiedades siguientes (observa que incluimos la propiedad fundamental, que acabamos de demostrar].

Propiedades de las proporciones

- Propiedad fundamental de las proporciones: el producto de los extremos de una proporción es igual al producto de sus medios.
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Cálculo de un término de una proporción

Para resolver proporciones debes aplicar su propiedad fundamental o las propiedades de la igualdad, ya que toda proporción es una ecuación.

Ejemplo 3

a. Resuelve la proporción $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$.

Solución

Al aplicar la propiedad fundamental de las proporciones tenemos que $4x = 40$, de donde

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{40}{4} \quad \text{o sea,}$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$x = 10$$

b. $\frac{4}{7} = \frac{x}{56}$.

Solución

En este caso, $4(56) = 7x$, de donde

$$x = \frac{4(56)}{7}$$

$$x = 4(8)$$

$$x = 32$$

Las proporciones como modelos matemáticos

Algunos problemas de la vida real se pueden resolver a partir del planteamiento y la solución de una proporción. Analicemos algunos ejemplos.

Ejemplo 4

a. Si un auto puede recorrer 270 kilómetros (km) con 15 litros (l) de gasolina, ¿qué distancia puede recorrer con 20 litros?

Solución

$$\begin{array}{lll} 15\ \ell & 270\ \text{km} & \\ 20\ \ell & x\ \text{km}, & \text{luego} \end{array}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{270}{x}$$

$$15x = 270(20)$$

$$x = \frac{270(20)}{15}$$

$$x = 360\ \text{km}$$

Con 20 litros el auto recorre 360 kilómetros.

b. La escala de un mapa indica que 0.4 centímetros (cm) representa 20 kilómetros (km). En el mapa, la distancia entre dos ciudades es de 8 cm. ¿Cuál es la distancia real entre las dos ciudades?

Solución

$$\begin{array}{lll} 0.4\ \text{cm} & 20\ \text{km} & \\ 8\ \text{cm} & x\ \text{km}; & \text{luego} \end{array}$$

$$\frac{0.4}{8} = \frac{20}{x}$$

$$x = 400 \text{ km}$$

La distancia real entre la ciudad es de 400 kilómetros.

c. Si 27 plumas cuestan \$48.60, ¿cuál es el costo de 60 plumas?

Solución

27 \$48.60
60 x; luego

$$\frac{27}{60} = \frac{48.6}{x}$$

$$x = 108$$

Así, 60 plumas cuestan \$108.

Ejercicios 2

I. *En las proporciones siguientes, halla el valor de x. (Elige la opción correcta.)*

1. $\frac{7}{5} = \frac{63}{x}$

a. $x = 48$
b. $x = 45$
c. $x = 50$
d. $x = 42$

b. $x = 45$

2. $\frac{2}{x} = \frac{5}{100}$

a. $x = 40$
b. $x = 35$
c. $x = 45$
d. $x = 50$

a. $x = 40$

3. $\frac{9}{12} = \frac{x}{60}$

a. $x = 40$
b. $x = 50$
c. $x = 45$
d. $x = 48$

a. $x = 40$

4. $7{:}x = 42{:}48$

a. $x = 8$
b. $x = 7$
c. $x = 6$
d. $x = 9$

a. $x = 8$

5. $\frac{14}{35} = \frac{x}{20}$

a. $x = 9$
b. $x = 7$
c. $x = 6$
d. $x = 8$

d. $x = 8$

6. $\frac{x}{150} = \frac{7}{10}$

a. $x = 110$
b. $x = 95$
c. $x = 115$
d. $x = 105$

d. $x = 105$

7. $\frac{7}{14} = \frac{58}{x}$

a. $x = 126$
b. $x = 116$
c. $x = 112$
d. $x = 118$

b. $x = 116$

8. $x{:}16 = 3{:}12$

a. $x = 3$
b. $x = 2$
c. $x = 4$
d. $x = 5$

c. $x = 4$

II. *Resuelve los problemas de aplicación siguientes donde el modelo matemático es una proporción. (Elige la opción correcta.)*

9. Un automóvil recorre 120 kilómetros (km) con 15 litros (ℓ) de gasolina. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 20 litros?

a. 180 km
b. 160 km
c. 190 km
d. 200 km

b. 160 km

10. Un automóvil recorre 96 kilómetros (km) con 8 litros (ℓ) de gasolina. ¿Cuántos litros se necesitan para recorrer 336 kilómetros?

a. 30 litros
b. 28 litros
c. 32 litros
d. 26 litros

b. 28 litros

11. Un auto que se mueve con rapidez constante recorre 330 metros (m) en 22 segundos (s). ¿Cuántos metros recorrerá en 28 segundos?

a. 420 m
b. 400 m
c. 450 m
d. 380 m

a. 420 m

12. Un avión que se mueve con velocidad constante recorre 420 kilómetros (km) en una hora (h). ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 2 730 kilómetros?

a. 7.5 h
b. 6 h
c. 5.75 h
d. 6.5 h

d. 6.5 h

13. La escala de un mapa indica que 5 centímetros (cm) representan 60 kilómetros (km). Si en el mapa la distancia entre dos ciudades es de 12 cm, ¿cuál es la distancia real entre ellas?

a. 140 km
b. 148 km
c. 150 km
d. 144 km

d. 144 km

14. Un motor gira 36 revoluciones en 3 segundos. ¿Cuántas revoluciones girará en 4 minutos?

a. 2 880
b. 2 800
c. 2 960
d. 2 840

a. 2 880

15. Se requieren cuatro kilogramos de harina para elaborar 160 tortillas. ¿Cuántos kilogramos se deben comprar para preparar 280 tortillas?

a. 6
b. 8
c. 7
d. 9

c. 7

16. En cierta ciudad, de una muestra de 150 habitantes 12 resultaron con influenza. Si la población es de 200 000 habitantes, ¿cuántos se estima que tengan influenza?

a. 16 000
b. 18 000
c. 15 600
d. 17 200

a. 16 000

17. De una muestra de 800 tornillos, 750 resultaron sin defecto. Si la producción total fue de 900 000 tornillos, ¿cuántos pueden salir defectuosos?

a. 56 250
b. 60 000
c. 52 400
d. 55 400

a. 56 250

18. Si 35 libros cuestan $2450, ¿cuánto tendrás que pagar por 80 libros?

a. $5800
b. $5400
c. $6100
d. $5600

d. $5600

19. Ocho galones de pintura son suficientes para pintar $\frac{4}{5}$ de una pared. ¿Cuántos galones se necesitarán para pintar la pared completa?

a. 12
b. 10
c. 9
d. 11

b. 10

20. Al vender 46 cerraduras se gana $1288. ¿Cuánto se ganará si venden 105 cerraduras?

a. $2940
b. $2900
c. $3000
d. $2800

a. $2940

Porcentajes

Una de las formas más eficientes para comparar cantidades es el uso de porcentajes. La razón de un número a cien se llama *porcentaje* (o *tanto por ciento*). Cuando se habla de un tanto por ciento, significa que dicho número puede dividirse en 100 partes iguales, de las cuales se toma un tanto. El porcentaje se representa con el símbolo %.

Todo porcentaje puede expresarse como una fracción o como un número decimal. Analiza los ejemplos siguientes:

- $40\% = \frac{40}{100} = 0.4$
- $5\% = \frac{5}{100} = 0.05$
- $200\% = \frac{200}{100} = 2$
- $120\% = \frac{120}{100} = 1.2$
- $100\% = \frac{100}{100} = 1$
- $50\% = \frac{50}{100} = 0.5$

Solución de problemas de porcentajes

Una forma sencilla de resolver problemas de porcentajes consiste en plantear el modelo como una proporción. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 5

a. Calcula el 20% de 86.

Solución

Si x representa 20% de 86, tenemos que:

- 100% corresponde a 86.
- 20% corresponde a x.

De la información anterior resulta la proporción siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{100}{20} &= \frac{86}{x}, && \text{de donde} \\ 100x &= (86)(20), && \text{luego} \\ x &= \frac{86(20)}{100} \\ x &= 17.2 \end{aligned}$$

El 20% de 86 es 17.2.

b. ¿48 es 12% de qué número?

Solución

Si x representa el número buscado, tenemos

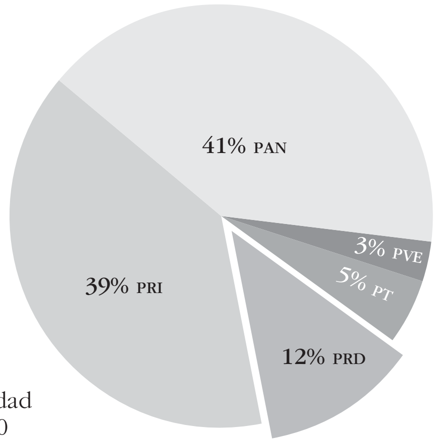
- 12% corresponde a 48.
- 100% corresponde a x.

Con la información anterior se forma esta proporción

$$\begin{aligned} \frac{12}{100} &= \frac{48}{x}, && \text{donde:} \\ 12x &= 48(100) \\ x &= \frac{48(100)}{12} \\ x &= 400 \end{aligned}$$

El 12% de 400 es 48.

c. El ejemplo siguiente se refiere a la gráfica circular de la figura de abajo. Mediante las gráficas circulares se comparan cantidades como parte de un todo. El todo es representado por el círculo y las partes aparecen como fracciones de éste. Generalmente las partes están expresadas en porcentajes y el círculo entero corresponde a 100%.



Número de votantes en la ciudad de Guadalupe en julio de 2000

Si en julio del año 2000 votaron 124 000 ciudadanos de la ciudad de Guadalupe, Nuevo León, ¿cuántos votaron por el PRD?

Solución

$$100\% \text{ ——— } 124\,000$$
$$12\% \text{ ——— } x, \qquad \text{luego}$$

$$\frac{100}{12} = \frac{124\,000}{x}$$

$$100x = 124\,000(12)$$

$$x = \frac{124\,000(12)}{100} = 14\,880$$

Por tanto, 14 880 ciudadanos votaron por el PRD.

d. ¿Cuánto por ciento de 250 es 50?

Solución

Si x representa el tanto por ciento de 250, cuyo número correspondiente es 50, entonces tenemos que

- 100% corresponde a 250.
- x% corresponde a 50.

De los datos anteriores resulta la proporción siguiente:

$$\frac{100}{x} = \frac{250}{50}$$

$$100(50) = 250x, \quad \text{de donde}$$

$$x = \frac{100(50)}{250}$$

$$x = 20$$

50 es 20% de 250.

e. ¿165 es 10% más que cuál número?

Solución

Si x representa el número buscado, tenemos esta información:

- 100% corresponde a x.
- 110% corresponde a 165.

De lo anterior resulta

$$\frac{100}{110} = \frac{x}{165}, \qquad \text{de donde}$$

$$100(165) = 110x$$

$$x = \frac{100(165)}{110}$$

$$x = 150$$

165 es 10% mayor que 150.

f. ¿322 es 8% menos de qué número?

Solución

Si 322 corresponde a 92% (100% − 8%), entonces x corresponde a 100%. De ello resulta:

$$\frac{322}{x} = \frac{92}{100}$$

$$322(100) = 92x$$

$$x = \frac{322(100)}{92}$$

$$x = 350$$

322 es 8% menor que 350.

Aplicación del porcentaje

Analicemos a continuación algunos problemas de aplicación de porcentajes.

Ejemplo 6

a. ¿En cuánto se venderá un refrigerador si su precio normal es de $12 600 y la tienda ofrece 15% de descuento?

Solución

Si x representa el precio de oferta, entonces

- 100% corresponde a $12 600.
- 85% corresponde a x.

Por tanto

$$\text{Oferta} = \text{total} - \text{descuento}$$

$$85\% = 100\% - 15\%$$

De ello resulta:

$$\frac{100}{85} = \frac{12\,600}{x}$$
$$100x = 12\,600(85)$$
$$x = \frac{12\,600(85)}{100}$$
$$x = 10\,710$$

El precio de oferta es de $10 710.

b. Ernesto compró un automóvil nuevo en $165 200 y el precio incluye 18% de impuesto. ¿Cuál es el precio del automóvil antes del impuesto?

Solución

Si x representa el precio del auto antes del impuesto, entonces $165 200 corresponde a 118% y x corresponde a 100%. Por tanto

$$\frac{165\,200}{x} = \frac{118}{100}$$
$$118x = 100(165\,200)$$
$$x = \frac{100(165\,200)}{118}$$
$$x = 140\,000$$

El precio del auto nuevo, antes del impuesto, es de $140 000.

Ejercicios 3

I. *Resuelve estos ejercicios:*

1. ¿Qué porcentaje de 140 es 91?

a. 63%
b. 65%
c. 68%
d. 70%

b. 65%

2. ¿Qué porcentaje de 80 es 112?

a. 120%
b. 125%
c. 135%
d. 140%

d. 140%

3. Encuentra el 30% de 70.

a. 18
b. 20
c. 24
d. 21

d. 21

4. Encuentra el 15% de 160.

a. 24
b. 26
c. 25
d. 27

a. 24

5. ¿Cuánto por ciento de 350 es 210?

a. 60%
b. 62%
c. 65%
d. 58%

a. 60%

6. ¿12 es 15% de qué número?

a. 70
b. 75
c. 80
d. 84

c. 80

7. ¿378 es 70% de qué número?

a. 560
b. 540
c. 520
d. 548

b. 540

8. ¿2530 es 15% más que cuál número?

a. 2200
b. 2000
c. 2100
d. 2400

a. 2200

9. Escribe 15% como fracción.

a. $\frac{3}{20}$
b. $\frac{1}{5}$
c. $\frac{2}{5}$
d. $\frac{1}{20}$

a. $\frac{3}{20}$

10. ¿Qué número disminuido en 20% es 352?

a. 460
b. 450
c. 444
d. 440

d. 440

11. ¿200 es 60% menos de qué número?

a. 500
b. 520
c. 480
d. 510

a. 500

12. Escribe 18% como fracción.

a. $\frac{6}{25}$
b. $\frac{1}{5}$
c. $\frac{7}{50}$
d. $\frac{9}{50}$

d. $\frac{9}{50}$

13. Escribe la fracción $\frac{48}{50}$ como porcentaje.

a. 94%
b. 96%
c. 98%
d. 9.6%

b. 96%

14. Escribe 140% en forma decimal.

a. 0.14
b. 14
c. 1.4
d. 0.014

c. 1.4

15. Escribe la fracción $\frac{9}{5}$ como porcentaje.

a. 1.8%
b. 18%
c. 180%
d. 160%

c. 180%

16. Escribe 14% en forma decimal.

a. 1.4
b. 0.014
c. 0.14
d. 0.0014

c. 0.14

II. *Resuelve los problemas siguientes:*

17. En un examen de 40 preguntas, un estudiante tuvo 32 aciertos. ¿Cuál es el porcentaje de respuestas correctas?

a. 78%
b. 80%
c. 82%
d. 85%

b. 80%

18. En una temporada de béisbol un bateador estuvo al bate 520 veces, de las cuales consiguió 182 hits. ¿Cuál es su porcentaje de bateo?

a. 0.38
b. 0.35
c. 35%
d. 38%
e. *b* y *c* son correctas

c. 35%

19. Un equipo de acondicionamiento de aire se vendió en $4000 luego de aplicarle 20% de descuento al precio de lista. ¿Cuál es el precio de lista del equipo?

a. $5000
b. $5200
c. $4800
d. $5400

a. $5000

20. Luis gana actualmente $12 000 al mes. ¿Cuánto ganaría si su salario se incrementara 14%?

a. $13 500
b. $13 700
c. $13 600
d. $13 680

d. $13 680

21. Una compañía necesita comprar un automóvil nuevo para uno de sus agentes de ventas. ¿Cuánto dinero necesita si su costo es de \$94 000 más 15% de impuesto?

a. \$110 920
b. \$108 100
c. \$105 400
d. \$112 600

b. \$108 100

22. El volumen del agua aumenta 9% cuando se congela. Si el volumen de un trozo de hielo es de 392.4 centímetros cúbicos (cm^3), ¿cuál es el volumen del agua?

a. 360 cm^3
b. 350 cm^3
c. 365 cm^3
d. 370 cm^3

a. 360 cm^3

23. El año pasado las ventas de una compañía fueron de \$8 647 000. Si en este año el ingreso asciende a \$9 944 050, ¿cuál fue el porcentaje de aumento de las ventas?

a. 18%
b. 16%
c. 15%
d. 20%

c. 15%

24. El costo de una sala es de \$18 400, ya con impuestos. ¿Cuál es su precio normal si el impuesto es de 15%?

a. \$16 400
b. \$16 000
c. \$16 800
d. \$15 900

b. \$16 000

25. Federico gana \$20 000 al mes. ¿Cuánto ganaría si su salario se incrementara 8%?

a. \$21 540
b. \$21 500
c. \$22 100
d. \$21 600

d. \$21 600

26. César compró un traje nuevo y le otorgaron 18% de descuento. Si en total pagó $2788, ¿cuál es el precio del traje sin descuento?

a. $3600
b. $3800
c. $3400
d. $4000

c. $3400

27. Mario compró un terreno en $280 000. Si desea venderlo y con ello obtener una ganancia de 16%, ¿a qué precio debe venderlo?

a. $324 800
b. $326 000
c. $320 500
d. $326 500

a. $324 800

28. Un ganadero vendió 36% de sus reses y se quedó con 160. ¿Cuántas reses tenía?

a. 280
b. 250
c. 260
d. 256

b. 250

29. El precio de lista de un DVD es de $750. Si te ofrecen 20% de descuento y pagas con un billete de $1000, ¿cuánto dinero debes recibir de cambio?

a. $350
b. $410
c. $400
d. $390

c. $400

30. Suburbia ofrece 16% de descuento en toda la ropa. Luisa compra una blusa de $240, un pantalón de $275 y una bufanda de $180. Si pagó con un billete de $1000, ¿cuánto dinero le devolvieron?

a. $428.6
b. $416.2
c. $408.5
d. $420.5

b. $416.2

31. En la cuarta parte del volumen de una cisterna de pared inclinada hay 500 litros (ℓ) de agua. Cada cuarto hacia arriba contiene 40% más de agua que el anterior. ¿Cuántos litros de agua caben en la cisterna?

a. 1400ℓ
b. 1380ℓ
c. 1372ℓ
d. 1364ℓ

c. 1372ℓ

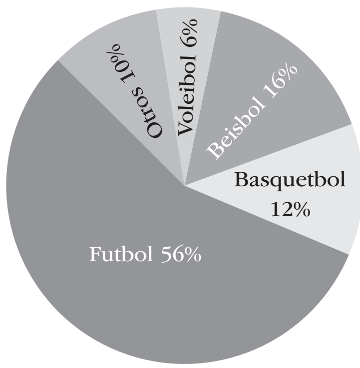
32. Cada hora una llave llena 20% de la capacidad de un tanque. Al mismo tiempo utiliza $\frac{2}{5}$ del agua que entra. ¿Qué porcentaje de agua habrá en el tanque cuando hayan transcurrido cinco horas?

a. 60%
b. 58%
c. 70%
d. 55%

a. 60%

III. *Resuelve los problemas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

En una encuesta realizada a 800 alumnos sobre el deporte de su preferencia se obtuvo la información siguiente:



33. ¿Cuántos alumnos prefieren el beisbol?

a. 128
b. 140
c. 124
d. 132

a. 128

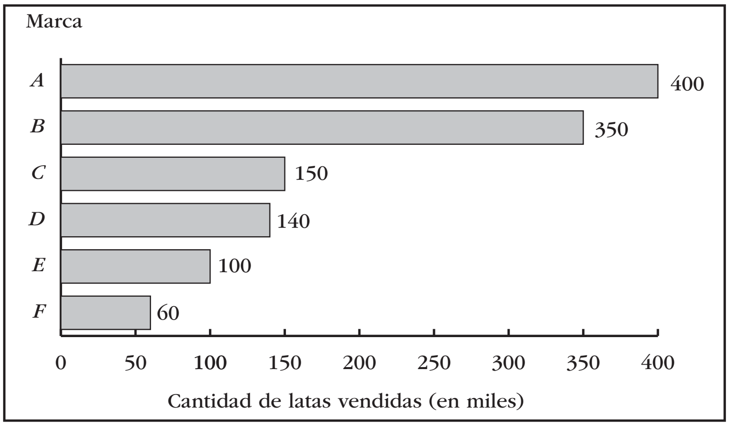
34. ¿Cuántos alumnos prefieren deportes que no son voleibol, beisbol, basquetbol o futbol?

a. 85
b. 70
c. 80
d. 90

c. 80

Las preguntas 35 y 36 se refieren a la información de la gráfica siguiente:

Latas de sopa vendidas por marca en el año 2000
en la tienda "Las Torres"



35. ¿Qué porcentaje de todas las sopas vendidas era de la marca *F*?

a. 6%
b. 8%
c. 5%
d. 4%

c. 5%

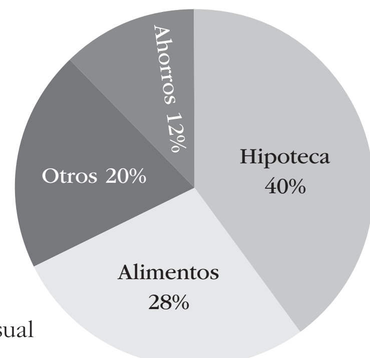
---

36. ¿Qué porcentaje de todas las sopas vendidas era de la marca *C*?

a. 14%
b. 12.5%
c. 11%
d. 10.5%

b. 12.5%

Las preguntas 37, 38 y 39 se refieren a la gráfica circular de la figura siguiente:



Presupuesto mensual
del doctor Valdez

37. Si el doctor Valdez gana $40 000 mensuales, ¿cuánto dinero ahorra por año?

a. $58 800
b. $59 400
c. $57 600
d. $63 200

c. $57 600

38. ¿Cuánto gasta en alimentación por año?

a. \$134 400
b. \$140 000
c. \$130 000
d. \$135 000

a. \$134 400

39. ¿Cuánto dinero gasta el doctor Valdez por año en hipoteca?

a. \$195 000
b. \$190 000
c. \$198 000
d. \$192 000

d. \$192 200

Evaluación

I. *Resuelve los ejercicios siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. Carlos contestó correctamente 34 preguntas de un examen de 50. ¿Cuál es la razón de respuestas correctas al número de preguntas?

a. 7:10
b. 4:5
c. 19:21
d. 17:25
e. 16:25

d. 17:25

2. En una escuela, la razón de alumnos de primer año respecto a los de segundo es de 7:5. Si hay 2760 alumnos en los dos grados, ¿cuántos hay en segundo año?

a. 1400
b. 1200
c. 1150
d. 1300
e. 1610

c. 1150

3. Resuelve la proporción $3:x = 12:32$.

a. $x = 7$
b. $x = 10$
c. $x = 8$
d. $x = 6$
e. $x = 5$

c. $x = 8$

4. Al vender 36 órdenes de tacos, Jesús ganó \$504. ¿Cuánto ganaría si vendiera 88 órdenes?

a. \$1280
b. \$1050
c. \$1320
d. \$1232
e. \$1260

d. \$1232

5. Se realizó una encuesta a 8000 personas, de las cuales 1600 opinaron que les gusta la música clásica. Si la población es de 400 000 habitantes, ¿a cuántas personas se estima que les gusta este tipo de música?

a. 80 000
b. 85 000
c. 90 000
d. 105 000

a. 80 000

6. ¿Qué porcentaje de 150 es 120?

a. 75%
b. 85%
c. 68%
d. 90%
e. 80%

e. 80%

7. ¿Qué porcentaje de 350 es 455?

a. 138%
b. 135%
c. 130%
d. 132%

c. 130%

8. Un estudiante contestó correctamente 18 preguntas de un examen de 30 de ellas. ¿Cuál es el porcentaje de sus respuestas correctas?

a. 60%
b. 54%
c. 62%
d. 58%
e. 64%

a. 60%

9. Luis se dedica a la compraventa de automóviles usados. Si compra uno en \$68 000 y desea ganar 16% de su inversión, ¿en cuánto debe venderlo?

a. \$78 880
b. \$80 000
c. \$76 500
d. \$82 000

a. \$78 880

10. Escribe 28% como fracción.

a. $\frac{7}{24}$
b. $\frac{7}{25}$
c. $\frac{9}{25}$
d. $\frac{6}{25}$

b. $\frac{7}{25}$

13

Sistemas de ecuaciones lineales

La ecuación lineal con dos incógnitas

Toda igualdad de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son constantes arbitrarias y tanto a como b son diferentes de cero, se llama *ecuación lineal* o *de primer grado con dos variables* o *incógnitas*. Por ejemplo, $4x + y = 9$.

Una ecuación de este tipo tiene un número infinito de soluciones; por ejemplo, la ecuación anterior se verifica para:

$$\begin{array}{rll}
x = 0,\ y = 9, & \text{ya que} & 4(0) + 9 = 9 \\
x = 1,\ y = 5, & \text{ya que} & 4(1) + 5 = 9 \\
x = 2,\ y = 1, & \text{ya que} & 4(2) + 1 = 9 \\
x = -3,\ y = 21, & \text{ya que} & 4(-3) + 21 = 9
\end{array}$$

Así podríamos encontrar un conjunto infinito de valores para las incógnitas que satisfagan la ecuación; por ello decimos que la ecuación es *indeterminada*.

Cada una de las soluciones de una ecuación de este tipo se representa mediante un par ordenado de la forma (x, y); por ejemplo, en la ecuación anterior los pares ordenados $(0, 9)$, $(1, 5)$, $(2, 1)$ y $(-3, 21)$ son soluciones, pero cabe recordar que no son las únicas.

Asimismo, observa que los pares ordenados $(1, 5)$ y $(5, 1)$ son diferentes; en el primero, $x = 1$ y $y = 5$, mientras que en el segundo $x = 5$ y $y = 1$.

Es frecuente que al resolver un problema práctico, en cuyo modelo matemático aparezca una ecuación de este tipo, sea necesario obtener una única solución, la cual, obviamente, no puede determinarse con una sola ecuación; es decir, se requieren dos o más ecuaciones de este tipo, las cuales en su conjunto constituyen lo que se denomina *sistema de ecuaciones lineales*.

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos o más ecuaciones de la forma:

$$ax + by = c$$

Sistema de ecuaciones lineales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \quad \text{donde } a_1 \text{ y } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \quad \text{donde } a_2 \text{ y } b_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Si los valores de x y de y son los mismos números en ambas ecuaciones, respectivamente, motivo por el cual éstas reciben el nombre de *simultáneas*, entonces todo par ordenado (x, y) que satisface ambas ecuaciones se llama *solución común* del sistema de ecuaciones, y en caso de que sea una solución común única, ésta es el *conjunto solución* de ese sistema de ecuaciones. Resolver un sistema de ecuaciones significa, por lo tanto, encontrar su conjunto solución.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden presentarse los tres casos siguientes:

1. Que el sistema tenga una solución única; entonces *el sistema es consistente independiente*.
2. Que el sistema no tenga solución; es decir, que no exista al menos un par de valores, uno para cada incógnita, que satisfaga más ecuaciones simultáneamente; en este caso *el sistema es inconsistente*.
3. Que el sistema tenga un conjunto infinito de soluciones; en este caso *el sistema es consistente dependiente*.

Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En este capítulo aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando los métodos siguientes:

- Método de eliminación (suma y resta)
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método por determinantes o regla de Cramer
- Método gráfico

Veamos a continuación en qué consiste cada uno de ellos.

Método de eliminación (suma y resta)

Este método consiste en eliminar una de las incógnitas de forma que el sistema de ecuaciones se reduzca a una sola ecuación con una sola incógnita.

Lo anterior se puede lograr al aplicar la siguiente propiedad de la igualdad.

> Si a ambos miembros de una igualdad se le suman o restan los de otra igualdad, se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 1

Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes.

a. $4x - y = 8$
$7x + y = 3$

Solución

Al sumar algebraicamente miembro a miembro la ecuación anterior resulta:

$$\begin{array}{r} 4x - y = 8 \\ + \quad 7x + y = 3 \\ \hline 11x + 0 = 11, \end{array} \quad \text{o sea}$$

$$11x = 11, \quad \text{de donde}$$

$$x = 1$$

b. $5x + 4y = 20$
$3x + 4y = 10$

Solución

Si se resta miembro a miembro, la ecuación $3x + 4y = 10$ de $5x + 4y = 20$ resulta

$$\begin{aligned} (5x - 3x) + (4y - 4y) &= (20 - 10), && \text{de donde} \\ 2x + 0 &= 10, && \text{o sea} \\ 2x &= 10, && \text{o sea} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de suma o resta se requiere que los coeficientes numéricos de una de las incógnitas tengan el mismo valor absoluto. Entonces, en caso de que se requiera, se debe multiplicar una o cada ecuación por un número diferente de cero, de tal forma que al efectuar dichas operaciones resulte un sistema de ecuaciones equivalentes al original con estas características.

Ejemplo 2

Resuelve los sistemas siguientes.

a. $2x + 4y = 7$
$-3x - 7y = 2$

Solución

Para eliminar la incógnita y en el sistema anterior podemos multiplicar la ecuación colocada en el renglón superior por 7 y la de abajo por 4, y a continuación sumar miembro a miembro las ecuaciones equivalentes que resultan de las operaciones efectuadas.

$$\begin{aligned} 7(2x + 4y) &= 7(7) \\ 4(-3x - 7y) &= 2(4) \end{aligned}$$

de donde al restar resulta:

$$\begin{array}{rr} - & \begin{array}{r} 14x + 28y = 49 \\ -12x - 28y = 8 \\ \hline 2x + \ \ 0y = 57, \end{array} \quad \text{o sea} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 57 \\ x &= \frac{57}{2} \end{aligned}$$

b. $2x - 5y = 3$
$3x - 4y = 10$

Solución

Para lograr que los coeficientes numéricos de la incógnita x tengan el mismo valor absoluto, multiplicamos los miembros de $2x - 5y = 8$ por 3 y los de $3x - 4y = 10$ por 2.

$$\begin{aligned} 3(2x - 5y) &= 8(3) \\ 2(3x - 4y) &= 10(2) \end{aligned}$$

Al efectuar las multiplicaciones indicadas resulta:

$$\begin{aligned} 6x - 15y &= 24 \\ 6x - 8y &= 20 \end{aligned}$$

Con el fin de reducir el sistema anterior a una ecuación con una sola incógnita restamos la ecuación $6x - 8y = 20$ de $6x - 15y = 24$:

$$
\begin{aligned}
6x - 15y &= 24\\
-(6x - 8y) &= -20
\end{aligned}
$$

$$
-\begin{array}{r}
6x - 15y = 24\\
-6x + 8y = -20\\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
0 - 7y &= 4, \quad \text{o sea}\\
-7y &= 4\\
y &= \frac{4}{-7}\\
y &= \frac{-4}{7}
\end{aligned}
$$

c. $\begin{aligned} 8x - 5y &= 6\\ 15x + 10y &= 3 \end{aligned}$

Solución

En este sistema observa que 10 es divisible entre 5 (es decir, $10 \div 5 = 2$); luego, para encontrar un sistema equivalente en el que los coeficientes numéricos de la incógnita y tengan el mismo valor absoluto basta multiplicar cada miembro de la ecuación $8x - 5y = 6$ por 2.

$$
\begin{aligned}
2(8x - 5y) &= 6(2)\\
15x + 10y &= 3
\end{aligned}
$$

$$
+\begin{array}{r}
16x - 10y = 12\\
15x + 10y = 3
\end{array}
$$

Al sumar miembro a miembro resulta:

$$
\begin{aligned}
31x &= 15, \quad \text{o sea}\\
x &= \frac{15}{31}
\end{aligned}
$$

Precisemos. El proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por este método consta de los pasos descritos a continuación.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de eliminación (suma o resta)

1. En caso de que se requiera, se escriben ambas ecuaciones en la forma $ax + by = c$.
2. En caso de que resulte necesario, se multiplica una o ambas ecuaciones por un número tal que resulten ecuaciones equivalentes a las originales, que contengan coeficientes con igual valor absoluto en una de las incógnitas y que al sumarlas o restarlas miembro a miembro resulte una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita que resulta del paso anterior.
4. Se sustituye el valor determinado en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve esta ecuación para determinar el valor de la otra incógnita.
5. Se comprueba la solución del problema.

Ejemplo 3

Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes por el método de eliminación (suma o resta).

a. $3x + y = 10$
$2x - y = 5$

Solución

Se observa que $y + (-y) = 0$; por tanto, si se suman las ecuaciones miembro a miembro resulta

$$\begin{array}{r} 3x + y = 10 \\ + \quad 2x - y = 5 \\ \hline 5x \quad\quad = 15 \end{array}$$

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

$$x = 3$$

Al sustituir este valor en la ecuación $3x + y = 10$ resulta:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ 3(3) + y &= 10 \\ 9 + y &= 10 \\ y &= 10 - 9 = 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Comprobación

Al sustituir estos valores en la ecuación $2x - y = 5$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2(3) - (1) &= 5 \\ 6 - 1 &= 5, \quad \text{es decir} \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

Asimismo, al sustituir valores en la otra ecuación queda:

$$\begin{aligned} 3(3) + 1 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

Entonces, la única solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$, la cual suele representarse como un par ordenado de la forma (x, y); es decir, $(3, 1)$.

b. $2x + 4y = 2$
$3x + 4y = 7$

Solución

Se observa que los términos que contienen la incógnita y en las ecuaciones tienen los mismos coeficientes numéricos; por tanto, para eliminar esos términos se resta una ecuación de la otra.
Si se resta $3x + 4y = 7$ de $2x + 4y = 2$ resulta

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 2 \\ -3x - 4y = -7 \\ \hline -\ x \quad\quad = -5 \end{array}$$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$-1(-x) = -5(-1),$$

de donde resulta

$$x = 5$$

Si se sustituye este valor en la ecuación $2x + 4y = 2$ resulta:

$$2(5) + 4y = 2, \quad \text{o sea:}$$
$$10 + 4y = 2$$

por lo que

$$4y = 2 - 10$$
$$4y = -8$$
$$y = -\frac{8}{4}$$
$$y = -2$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 2 \\ 2(5) + 4(-2) &= 2 \\ 10 - 8 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3(5) + 4(-2) &= 7 \\ 15 - 8 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto solución es el par ordenado $(5, -2)$:

c. $7x - 15 = -2y$
$5y - 3 = -6x$

Primero se escriben las ecuaciones en la forma $ax + by = c$

$$7x + 2y = 15$$
$$6x + 5y = 3$$

Si se quiere eliminar los términos que contienen la incógnita y se pueden efectuar las operaciones siguientes: multiplicar por 5 los dos miembros de la ecuación $7x + 2y = 15$, multiplicar por 2 ambos miembros de la ecuación $6x + 5y = 3$ y después restar una de las ecuaciones derivadas de la otra.

$$5(7x + 2y) = 5(15) \qquad 35x + 10y = 75$$
$$2(6x + 5y) = 2(3) \qquad 12x + 10y = 6$$

Si se resta la ecuación $12x + 10y = 6$ de la ecuación $35x + 10y = 75$ resulta:

$$\begin{array}{r} 35x + 10y = 75 \\ -12x - 10y = -6 \\ \hline 23x \qquad\quad = 69 \end{array}$$

$$x = \frac{69}{23} = 3$$
$$x = 3$$

Al sustituir este valor en la ecuación $6x + 5y = 3$ se obtiene

$$6(3) + 5y = 3$$
$$18 + 5y = 3$$
$$5y = 3 - 18$$
$$5y = -15$$
$$y = \frac{-15}{5} = -3$$
$$y = -3$$

Comprobación

Si se sustituyen estos valores en $7x + 2y = 15$ queda

$$7(3) + 2(-3) = 15$$
$$21 - 6 = 15$$
$$15 = 15$$

Por tanto, el conjunto solución es $(3, -3)$.

En los ejemplos expuestos se han eliminado siempre los términos que contienen la incógnita y; sin embargo, debemos aclarar que si conviene pueden eliminarse igualmente los términos que contienen la incógnita x.

Ejercicios 1

I. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. (Elige la opción correcta.)*

1. $2x + y = 3$
$5x + 3y = 10$

a. $(-1, -5)$
b. $(-1, 5)$
c. $(1, -5)$
d. $(-1, 4)$

b. $(-1, 5)$

2. $4x - 7y = -10$
$3x + 2y = 7$

a. $(2, 2)$
b. $(1, 2)$
c. $(1, 3)$
d. $(2, 1)$
e. $(1, -2)$

b. $(1, 2)$

3. $8x - 3y = 5$
$5x - 2y = 4$

a. $(-2, 7)$
b. $(2, 7)$
c. $(-2, -7)$
d. $(-2, 6)$
e. $(-7, -2)$

c. $(-2, -7)$

4. $2x + y = -2$
$6x - 5y = 18$

a. $(0.5, -3)$
b. $(0.5, 3)$
c. $(2, -3)$
d. $(0.5, -4)$
e. $(-3, 0.5)$

a. $(0.5, -3)$

5. $2x - 3y = 1$
$3x - 4y = 7$

a. $(15, 11)$
b. $(17, 12)$
c. $(17, 13)$
d. $(13, 11)$
e. $(17, 11)$

e. $(17, 11)$

6. $8x - y = 29$
$2x + y = 11$

a. $(4, 3)$
b. $(4, 5)$
c. $(3, 4)$
d. $(5, 2)$
e. $(4, 2)$

a. $(4, 3)$

7. $2x + 9y = 39$
$5x - y = -20$

a. $(3, 5)$
b. $(5, -2)$
c. $(-3, 5)$
d. $(3, -5)$
e. $(-3, -5)$

c. $(-3, 5)$

8. $7x + 10y = -14$
$3x - 16 = 2y$

a. $(3, 3.5)$
b. $(3, -3.5)$
c. $(-3, -3.5)$
d. $(3, 3.5)$

b. $(3, -3.5)$

9. $6x - 5y = 28$
$4x + 9y = -6$

a. $(-3, 2)$
b. $(-2, 3)$
c. $(2, -3)$
d. $(3, -2)$

d. $(3, -2)$

11. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{17}{4}$

a. $(6, 3)$
b. $(6, 5)$
c. $(5, 6)$
d. $(3, 6)$
e. $(6, 4)$

b. $(6, 5)$

10. $5x + 2y = 24$
$4x - 29 = -3y$

a. $(2, -7)$
b. $(-7, 2)$
c. $(2, 7)$
d. $(7, 2)$
e. $(2, 6)$

c. $(2, 7)$

12. $2(x + y) - 3(x - y) = 10$
$2(3x - 2y) - 3(x - y) = 12$

a. $(5, 3)$
b. $(5, 4)$
c. $(4, 5)$
d. $(3, 5)$
e. $(5, 6)$

a. $(5, 3)$

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema, en caso de que sea necesario, y después sustituir su expresión equivalente en la otra.

Como resultado de la sustitución se llega a una ecuación con una incógnita cuyo valor se obtiene al resolverla.

Por último, se sustituye el valor de la incógnita obtenida en la ecuación donde está despejada la otra incógnita y así se determina el valor de esta última.

Ejemplo 4

a. Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente por el método de sustitución.

$$\begin{aligned} 4x - y &= 13 \\ 3x + 2y &= 29 \end{aligned}$$

Solución

Despejemos la incógnita y de la ecuación $4x - y = 13$

$$-y = 13 - 4x$$

Al multiplicar por (-1) ambos miembros de la ecuación anterior resulta

$$y = -13 + 4x$$

A continuación sustituyamos la expresión equivalente a la incógnita y en la otra ecuación del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 29 \\ 3x + 2(-13 + 4x) &= 29 \\ 3x - 26 + 8x &= 29 \\ 11x &= 29 + 26 \end{aligned}$$

$$11x = 55$$
$$x = \frac{55}{11}$$
$$x = 5$$

Hallemos a continuación el valor de la incógnita y, sustituyendo la x por 5 en la ecuación donde la incógnita y está despejada

$$y = -13 + 4x; \quad \text{luego}$$
$$y = -13 + 4(5), \quad \text{o sea}$$
$$y = 7$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 4x - y &= 13 \\ 4(5) - 7 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y &= 29 \\ 3(5) + 2(7) &= 29 \\ 29 &= 29 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución del sistema es el par ordenado (5, 7).

b. Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente por el método de sustitución.

$$5x + 7y = 1$$
$$3x + 2y = 5$$

Solución

Despejaremos la incógnita x en la ecuación $3x + 2y = 5$. (*Nota:* podemos despejarla en la otra ecuación, o la incógnita y en cualquiera de las ecuaciones del sistema.)

$$3x = 5 - 2y$$
$$x = \frac{5 - 2y}{3}$$

Sustituyamos la expresión equivalente de x en la otra ecuación:

$$5x + 7y = 1$$
$$5\left(\frac{5 - 2y}{3}\right) + 7y = 1$$

Multiplicaremos por 3 ambos miembros de la ecuación anterior para obtener otra equivalente a ella con coeficientes enteros:

$$3\left[5\left(\frac{5 - 2y}{3}\right) + 7y\right] = 1(3)$$
$$3(5)\left(\frac{5 - 2y}{3}\right) + 21y = 3$$
$$5(5 - 2y) + 21y = 3$$
$$25 - 10y + 21y = 3$$
$$-10y + 21y = 3 - 25$$
$$11y = -22, \quad \text{luego}$$
$$y = \frac{-22}{11}$$
$$y = -2$$

Hallemos el valor de la incógnita x sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación donde x está despejada

$$x = \frac{5 - 2y}{3}$$

$$x = \frac{5 - 2(-2)}{3}$$

$$x = \frac{5 + 4}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 5x + 7y &= 1 \\ 5(3) + 7(-2) &= 1 \\ 15 - 14 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 3(3) + 2(-2) &= 5 \\ 9 - 4 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par ordenado (3, 5).

Ejercicios 2

I. *Resuelve las ecuaciones siguientes por el método de sustitución. (Elige la opción correcta.)*

1. $5x + y = -17$
$2x + 5y = 7$

a. $(-4, 5)$
b. $(4, 3)$
c. $(-4, 3)$
d. $(-4, 2)$
e. $(-4, -3)$

c. $(-4, 3)$

2. $8x - y = 49$
$3x + 2y = -3$

a. $(5, -7)$
b. $(5, -9)$
c. $(5, -11)$
d. $(-5, 6)$
e. $(4, -9)$

b. $(5, -9)$

3. $3x - 4y = 20$
$x - 12y = -20$

a. $(10, 3)$
b. $(10, 2)$
c. $(11, 2.5)$
d. $(10, 2.5)$
e. $(12, 2.5)$

d. $(10, 2.5)$

4. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 48 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$

a. (2, 8)
b. (3, 7.2)
c. (8, 3.2)
d. (2, 9)
e. (8, 2)

a. (2, 8)

---

5. $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 9x - 8y &= 20 \end{aligned}$

a. (13, 10)
b. (15, 8)
c. (12, 11)
d. (11, 12)
e. (14, 7)

c. (12, 11)

---

6. $\begin{aligned} 6x + 5y &= -17 \\ 5x - 12y &= 2 \end{aligned}$

a. (−2, 1)
b. (2, −1)
c. (−2, −2)
d. (−2, 2)
e. (−2, −1)

e. (−2, −1)

Método de igualación

Este método consiste en despejar primero una misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema, luego igualar las expresiones equivalentes de ellas y finalmente resolver la ecuación obtenida con dicha igualación.

Al resolver la ecuación que resulta de la igualación de las expresiones equivalentes a la incógnita despejada se obtiene el valor de la incógnita contenida en ella.

Para obtener el de la otra incógnita se sustituye el valor obtenido de la ecuación anterior en cualquiera de las expresiones en las que la incógnita está despejada.

Ejemplo 5

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales siguiente por el método de igualación

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 17 \\ 7x - 4y &= 8 \end{aligned}$$

Solución

Primero despejamos la incógnita x en ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 17 \\ 8x &= 17 + 3y \\ x &= \frac{17 + 3y}{8} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 7x - 4y &= 8 \\ 7x &= 8 + 4y \\ x &= \frac{8 + 4y}{7} \end{aligned}$$

Igualamos las expresiones equivalentes a la incógnita x

$$\frac{17+3y}{8}=\frac{8+4y}{7}$$

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación anterior por el mínimo común denominador (MCD) de los denominadores 7 y 8, o sea, 56 (ya que $7 \times 8 = 56$)

$$56\left(\frac{17+3y}{8}\right)=56\left(\frac{8+4y}{7}\right)$$
$$7(17+3y)=8(8+4y)$$
$$119+21y=64+32y$$
$$21y-32y=64-119$$
$$-11y=-55$$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación anterior resulta

$$11y=55; \qquad \text{luego,}$$
$$y=\frac{55}{11}$$
$$y=5$$

Hallemos el valor de la incógnita x:

$$x=\frac{17+3y}{8} \qquad x=\frac{8+4y}{7}$$
$$x=\frac{17+3(5)}{8} \qquad x=\frac{8+4(5)}{7}$$
$$x=\frac{32}{8} \qquad x=\frac{28}{7}$$
$$x=4 \qquad x=4$$

Comprueba que el conjunto solución del sistema es (4, 5).

Ejercicios 3

I. *Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales siguientes por el método de igualación. (Elige la opción correcta.)*

1. $6x - 5y = 28$
$4x + 9y = -6$

a. $(-3, 2)$
b. $(3, -4)$
c. $(3, -2)$
d. $(-3, -2)$

c. $(3, -2)$

2. $3x + 2y = 2$
$-2x + y = 8$

a. $(-2, 4)$
b. $(-2, -4)$
c. $(2, -4)$
d. $(-2, 5)$

a. $(-2, 4)$

3. $x - 3y = -4$
   $2x - y = 7$

   a. (3, 5)
   b. (5, 4)
   c. (4, 5)
   d. (5, 3)

d. (5, 3)

4. $2x - 3y = 5$
   $3x + 4y = -18$

   a. (−2, −4)
   b. (−2, −3)
   c. (2, 3)
   d. (−2, 3)

b. (−2, −3)

5. $x + 2y = 2$
   $-x + y = 10$

   a. (−6, 4)
   b. (−6, 2)
   c. (6, −4)
   d. (−6, 5)

a. (−6, 4)

Método por determinantes (regla de Cramer)

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Al utilizar el método de suma y resta hallemos la expresión equivalente a la incógnita x en términos de las constantes a, b y c del sistema.

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación $a_1x + b_1y = c_1$ por b_2 y los de $a_2x + b_2y = c_2$ por b_1

$$\begin{aligned} b_2(a_1x + b_1y) &= c_1b_2 \\ b_1(a_2x + b_2y) &= c_2b_1 \\ a_1b_2x + b_1b_2y &= c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y &= c_2b_1 \end{aligned}$$

Restemos a continuación miembro a miembro la ecuación del sistema anterior que se encuentra en el renglón por debajo de la que está en el de arriba

$$\begin{aligned} a_1b_2x + b_1b_2y &= c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y &= c_2b_1, \qquad \text{de donde} \\ a_1b_2x - a_2b_1x + 0 &= c_1b_2 - c_2b_1 \\ a_1b_2x - a_2b_1x &= c_1b_2 - c_2b_1 \end{aligned}$$

De acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación

$$a_1b_2x - a_2b_1x = x(a_1b_2 - a_2b_1)$$

por consiguiente

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \text{o sea}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Análogamente podremos demostrar que

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Estas expresiones equivalentes a las incógnitas x y y nos servirán de referencia para demostrar en qué consiste el método de determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, así que haremos referencia a ellas más adelante.

Determinante

Un determinante es un arreglo de números encerrados entre dos barras verticales. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 4 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Un determinante está constituido por columnas e hileras o renglones. Las columnas están formadas por los números que se encuentran en una misma línea vertical y las hileras o renglones por los que están colocados en una misma línea horizontal.

Cuando un determinante tiene el mismo número de renglones que de columnas se trata de un *determinante cuadrado*; si un arreglo de este tipo tiene dos renglones y dos columnas, entonces es de *segundo orden*; por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Un determinante que tiene tres hileras y tres columnas es de *tercer orden*; por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

Diagonales principal y secundaria de un determinante de segundo orden

La *diagonal principal* de un determinante de segundo orden es la línea de números de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, mientras que la *diagonal secundaria* es la línea de los elementos de la esquina inferior izquierda a la superior derecha; por ejemplo

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

a) Diagonal principal *b)* Diagonal secundaria

Evaluación de un determinante de segundo orden

Un determinante de segundo orden es el número que resulta al restar el producto de los números de la diagonal secundaria del producto de los de la diagonal principal, es decir

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Encuentra el valor de los determinantes siguientes.

Ejemplo 6

a. $\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8(3) - (2)(-6) = 24 + 12 = 36$$

b. $\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7(2) - (-3)(4) = -14 + 12 = -2$$

Veamos nuevamente las expresiones equivalentes de las incógnitas del sistema de ecuaciones mencionado al principio de este tema.

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Observa que el denominador de ambas expresiones es el mismo número $a_1b_2 - a_2b_1$, el cual resulta al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

En lo sucesivo, a este denominador lo representaremos con el símbolo D, o sea, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

El numerador de la expresión equivalente a la incógnita x es el número $c_1b_2 - c_2b_1$, el cual resulta al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

En lo sucesivo, a este numerador lo representaremos con el símbolo Dx.

Por último, observa que el numerador de la expresión equivalente a la incógnita y es el número $a_1c_2 - a_2c_1$, el cual resulta al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ que representaremos con el símbolo Dy.

De acuerdo con lo anterior, para resolver un sistema de ecuaciones por el método de determinantes aplicamos lo que se conoce como *regla de Cramer*, la cual postula lo siguiente.

Regla de Cramer

$$x = \frac{DX}{D} \quad \text{o sea} \quad \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{Dy}{D} \quad \text{o sea} \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

donde obviamente D debe ser diferente de cero.

Si al evaluar el determinante D resulta que es igual a cero, la regla de Cramer no puede aplicarse, ya que la división entre cero no está definida.

Si al evaluar Dx y Dy resulta que $Dx = 0$ y $Dy = 0$ cuando $D = 0$, entonces el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones y decimos que es *dependiente*.

Si Dx o Dy no son cero cuando $D = 0$, el sistema no tiene soluciones y decimos que es *inconsistente*.

Si $D \neq 0$, entonces se dice que el sistema de ecuaciones es *consistente* e *independiente*.

Ejemplo 7

Utiliza la regla de Cramer para resolver este sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x - y &= 30 \\ 4x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Solución

En este caso se tiene que

$$a_1 = 3;\ b_1 = -1,\ c_1 = 30$$
$$a_2 = 4;\ b_2 = 3,\ c_2 = 1$$

por tanto, al hacer las sustituciones correspondientes se obtiene

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(3) - 4(-1) = 13$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 30 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 30(3) - 1(-1) = 91$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 120 = -117$$

De acuerdo con la regla de Cramer

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{91}{13} \quad \text{y} \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-117}{13}$$

Por ende

$$x = 7 \qquad\qquad y = -9$$

Comprobación

$$\begin{array}{ll} 3x - y = 30; & 4x + 3y = 1 \\ 3(7) - (-9) = 30 & 4(7) + 3(-9) = 1 \\ 21 + 9 = 30 & 28 - 27 = 1 \\ 30 = 30 & 1 = 1 \end{array}$$

Por tanto, el conjunto solución del sistema indicado es $(7, -9)$.

Ejercicios

I. *Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes utilizando la regla de Cramer.*

1. $3x - 5y = -15$
$2x + y = 16$

a. (6, 5)
b. (6, 4)
c. (5, 6)
d. (5, 4)
e. (5, 3)

c. (5, 6)

---

2. $7x + 8y = -5$
$-x + 9y = 21$

a. (−3, 2)
b. (−3, 3)
c. (−3, −2)
d. (3, −2)
e. (3, 2)

a. (−3, 2)

---

3. $6x - 5y = 28$
$4x + 9y = -6$

a. (3, −1)
b. (4, −2)
c. (5, −2)
d. (3, −2)
e. (3, 2)

d. (3, −2)

---

4. $8x - 5y = -4$
$2x - 3y = -8$

a. (3, 4)
b. (2, 4)
c. (2, 5)
d. (3, 5)
e. (2, −4)

b. (2, 4)

---

5. $2x - y = 6$
$x - 2y = -9$

a. (7, 9)
b. (6, 8)
c. (7, 8)
d. (5, 8)
e. (7, 6)

c. (7, 8)

---

6. $-x - 9y = 11$
$7x - 15y = 1$

a. (−2, −1)
b. (−2, 1)
c. (−3, −1)
d. (2, −1)
e. (−2, −2)

a. (−2, −1)

Método gráfico

Para aprender a resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico recordemos primero cómo localizar pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas.

Coordenadas rectangulares

Sistema de coordenadas cartesianas

Consideremos que en el plano se ha seleccionado un punto fijo O (origen de coordenadas) y un par de rectas perpendiculares que se cortan en O (ejes de coordenadas), uno de los cuales se establece como eje de abscisas y el otro como eje de ordenadas (figura 1).

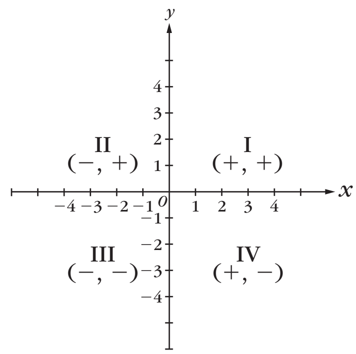


Figura 1. Sistema de coordenadas cartesianas.

Las coordenadas cartesianas de un punto P del plano respecto a este sistema de referencia son el par de números reales (x, y), en el que y representa la distancia dirigida de P al eje de las abscisas y la x representa la distancia también dirigida de P al eje de ordenadas.

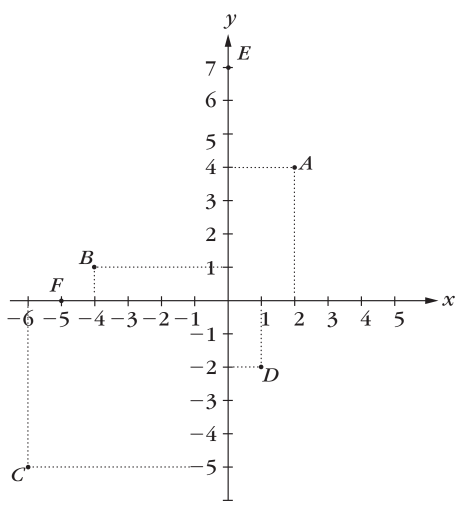
Para localizar un punto $P(x, y)$ en un sistema de coordenadas cartesianas se traza, a partir de dicho punto P, una línea punteada perpendicular al eje de las x. El número que corresponde al punto donde interseca dicho eje representa el valor de la abscisa, o sea, el valor de x del punto. De igual manera, a partir del punto P se traza una línea perpendicular al eje de las y, y el número que corresponde a la lectura del punto donde se interseca dicho eje representa la ordenada, o sea, el valor de y.

Ejemplo 8

Determina las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F en el sistema de coordenadas cartesianas siguiente

Solución

A (2, 4)
B (−4, 1)
C (−6, −5)
D (1, −2)
E (0, 7)
F (−5, 0)



En caso contrario, para marcar un punto cuyas coordenadas se conocen, se siguen estos pasos:

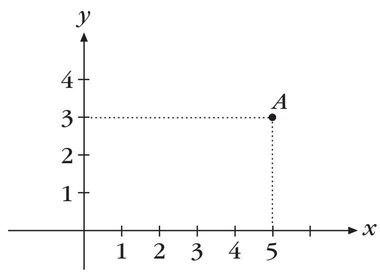
1. Se marca en primer lugar su abscisa en el eje de las x.
2. Se traza una línea punteada perpendicular al eje de las x por dicho punto.
3. Se marca su ordenada en el eje y y se traza una línea perpendicular al eje y; el punto donde se intersecan estas líneas punteadas es la representación geométrica del par ordenado. Recuerda, hablamos de un par ordenado porque, por ejemplo, el punto (4, 7) no representa lo mismo que el punto (7, 4).

Ejemplo 9

Marca los puntos siguientes en un sistema de coordenadas cartesianas.

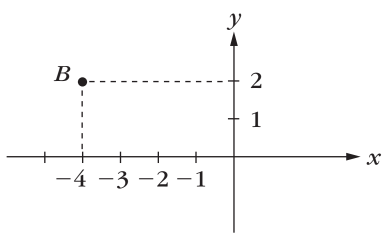
a. $A(5, 3)$, es decir, $x = 5$, $y = 3$.

Solución



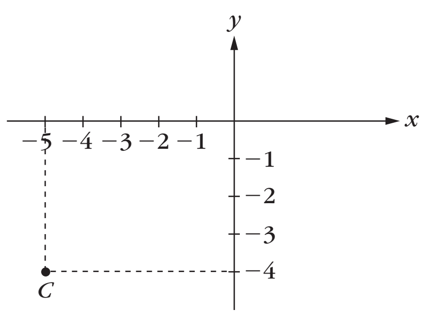
b. $B(-4, 2)$

Solución



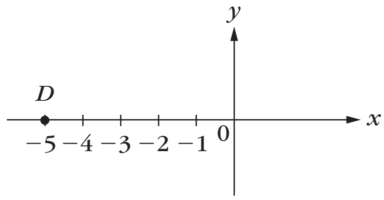
c. $C(-5, -4)$

Solución



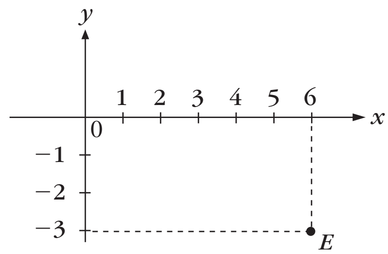
d. $D(-5, 0)$

Solución



e. $E(6, -3)$

Solución



Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico

La gráfica de una ecuación de la forma $ax + by = c$ es una recta; ahora debe resultar claro por qué se les llama *ecuaciones lineales*.

Una recta queda determinada si se conocen dos de sus puntos; por tanto, para representar gráficamente una ecuación lineal con dos variables basta encontrar dos de sus soluciones y trazar la recta que pasa por los puntos que las representan.

De acuerdo con lo anterior, si se quiere mostrar gráficamente una ecuación de la forma $ax + by = c$, se despeja, por ejemplo, la variable y, después se sustituye la variable x por dos valores diferentes y se encontrarán dos valores correspondientes a la variable y. A continuación se marcan en un sistema de coordenadas los pares ordenados (x, y) obtenidos y se traza la recta que pasa por tales puntos; ésa es la gráfica de dicha ecuación.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de los puntos comunes a las rectas que representan esas ecuaciones.

Si dos rectas son paralelas nunca se intersecarán; por ende, el sistema formado por sus ecuaciones no tiene solución y entonces forma un *sistema de ecuaciones inconsistente*.

Si dos ecuaciones lineales de la forma $ax + by = c$ son equivalentes, entonces ambas representan una misma recta, de modo que cada punto (x, y) que forma parte de ella es solución del sistema. En este caso, el conjunto solución es infinito y el sistema formado por sus ecuaciones es *dependiente consistente*.

Por último, si dos ecuaciones lineales de la forma $ax + by = c$ no representan la misma recta o no son paralelas, entonces sus gráficas se cortan en un solo punto (x_0, y_0), que es la solución del sistema formado por ellas.

De acuerdo con lo anterior, para resolver por el método gráfico un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas hay que trazar las gráficas (rectas) de cada ecuación en un sistema de coordenadas cartesiano y su conjunto solución estará formado por los pares ordenados (x, y) comunes a ambas rectas.

Ejemplo 10

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned}$$

Primero se despeja la incógnita y en la ecuación 1 y se encuentran dos de sus valores al sustituir dos valores de x en dicha ecuación, por ejemplo, para $x = 0$ y para $x = 1$.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ -y &= 6 - 3x \end{aligned}$$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación resulta

$$y = -6 + 3x$$
$$y = 3x - 6$$

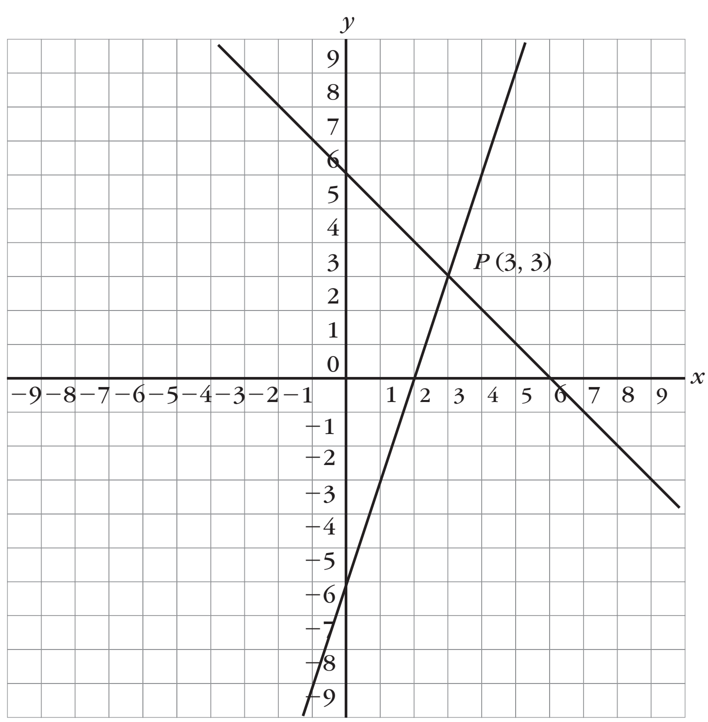
x	$y = 3x - 6$	$P(x, y)$
0	$3(0) - 6 = -6$	$(0, -6)$
1	$3(1) - 6 = -3$	$(1, -3)$

A continuación se despeja la variable y en la ecuación 2 y se repite el proceso anterior

$$x + y = 6, \quad \text{luego}$$
$$y = 6 - x$$

x	$y = 6 - x$	$P(x, y)$
0	$6 - 0 = 6$	$(0, 6)$
1	$6 - 1 = 5$	$(1, 5)$

Se trazan las rectas uniendo los puntos obtenidos que corresponden a cada uno de ellos en un mismo sistema de coordenadas cartesiano

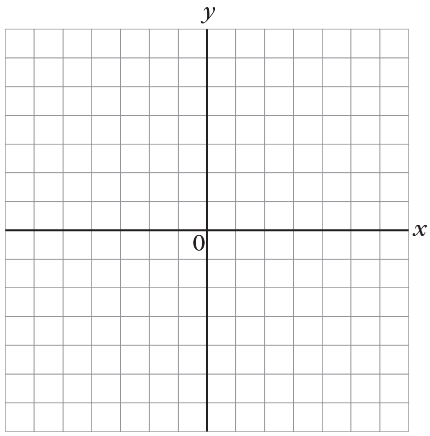


Observa que el conjunto solución del sistema es el par ordenado (3, 3).

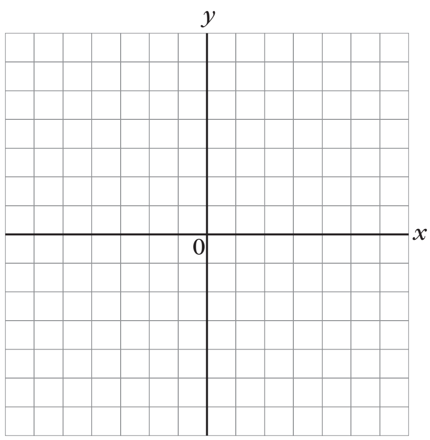
Ejercicios 5

I. *Traza la gráfica de las ecuaciones que se indican.*

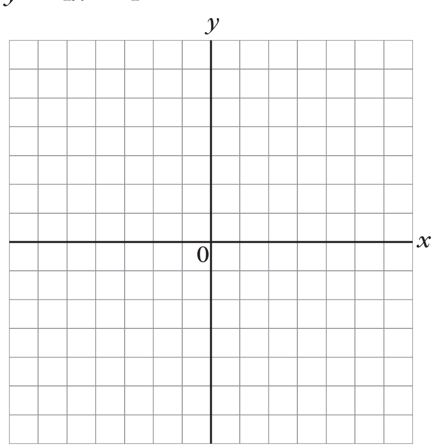
1. $y = x + 2$



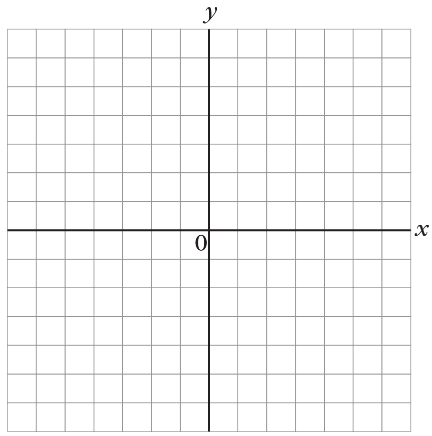
2. $y = x - 1$



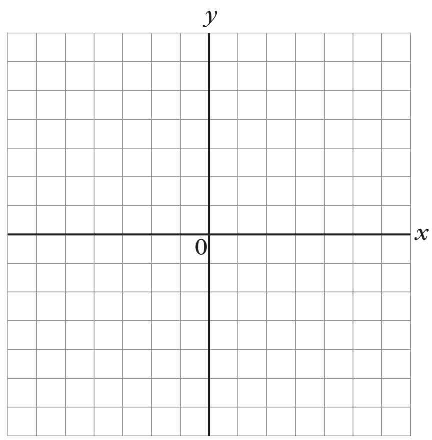
3. $y = 4x - 4$



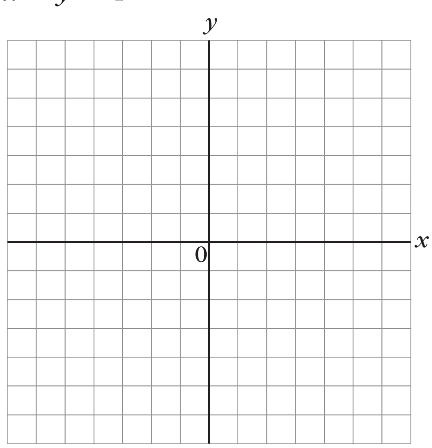
4. $y = 2x - 6$



5. $x + 6 = y$



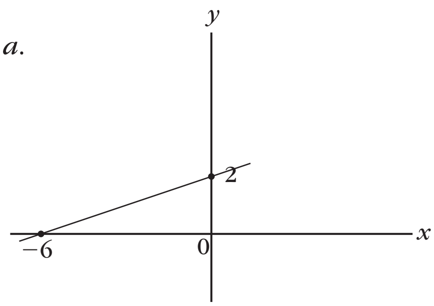
6. $x - y = 4$



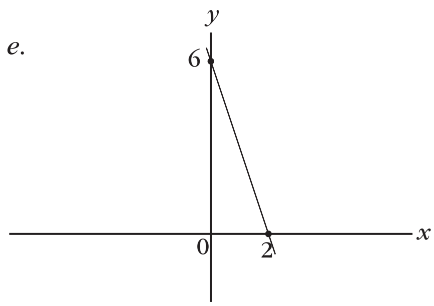
II. *Determina la gráfica que corresponda a cada una de las ecuaciones siguientes.*

7. ( ) $x - 3y = 6$	**9.** ( ) $3x + y = 6$	**11.** ( ) $-x + 3y = 6$
8. ( ) $y = 3x + 6$	**10.** ( ) $x + 3y = 6$	**12.** ( ) $x + 3y = -6$

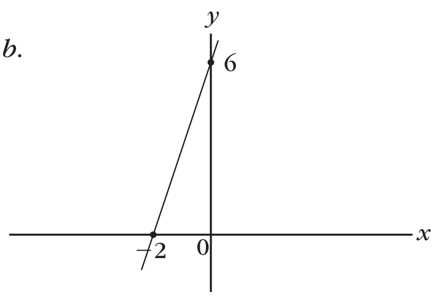
a.



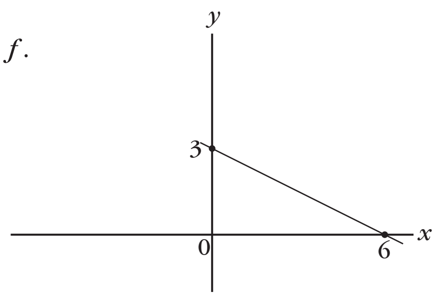
e.



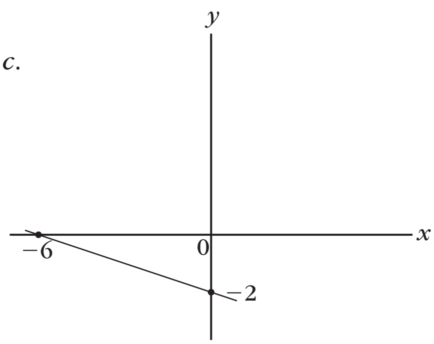
b.



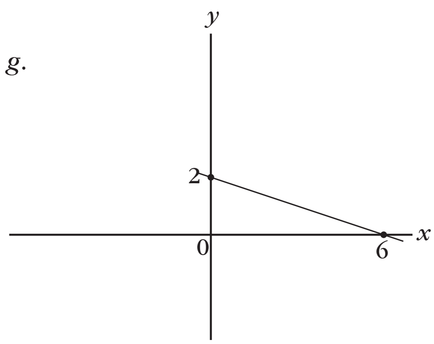
f.



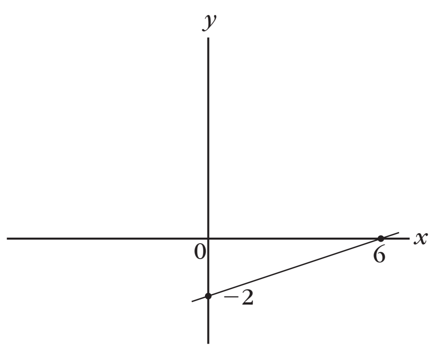
c.



g.



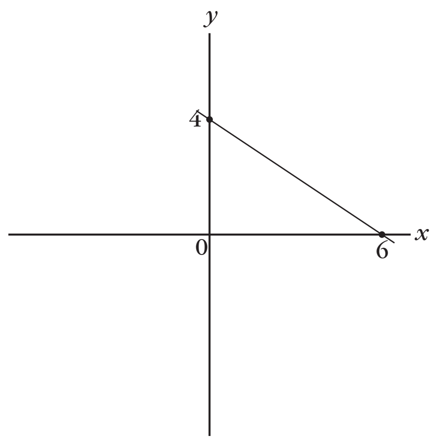
d.



III. *Realiza lo que se indica en cada ejercicio. (Elige la opción correcta.)*

13. Determina la ecuación que corresponde a la gráfica de la figura siguiente.

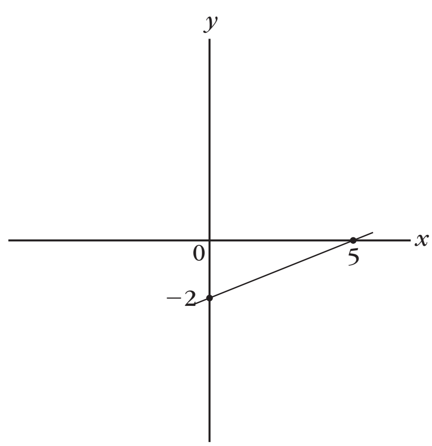
a. $2x - 3y = 12$
b. $2x - 3y = -12$
c. $3x - 2y = 12$
d. $2x + 3y = 12$
e. $2x + 3y = -12$



d. $2x + 3y = 12$

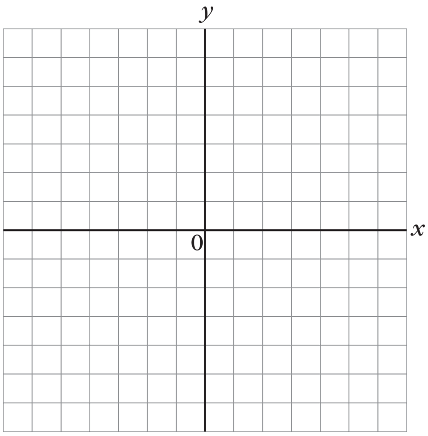
14. Determina la ecuación que corresponde a la recta de la siguiente figura.

a. $2x + 5y = 10$
b. $5x + 2y = 10$
c. $2x - 5y = 10$
d. $5x - 2y = 10$
e. $-2x - 5y = 10$

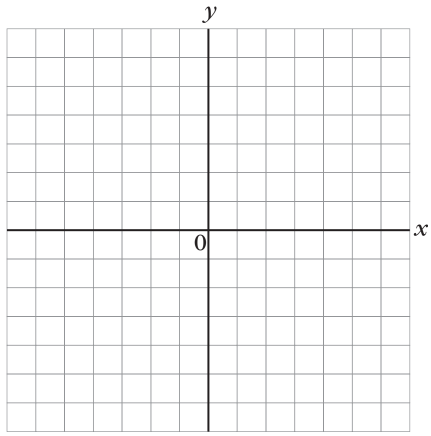


IV. *Resuelve por el método gráfico estos sistemas de ecuaciones lineales.*

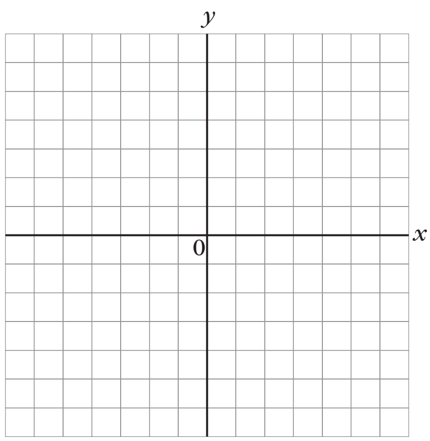
15. $3x - y = 6$
$x + y = 6$



17. $x - y = 2$
$x + y = 6$



16. $x + y = 7$
$x - y = 3$



Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como modelos matemáticos

A continuación veremos algunos ejemplos de la aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo 11

Se tiene que 5 kilogramos (kg) de almendra y 4 kg de nuez cuestan \$44.00, mientras que 8 kg de almendra y 6 kg de nuez cuestan \$69.00. Encuentra el precio por kilogramo de cada producto.

Solución

Si x representa el precio de 1 kg de almendra y y el de 1 kg de nuez, resultan entonces estas ecuaciones:

$$5x + 4y = 44$$
$$8x + 6y = 69$$

Para encontrar el precio de un kilogramo de cada producto hay que resolver este sistema de ecuaciones.

Si se utiliza el método de eliminación (suma y resta) y se desea eliminar la incógnita x, primero se multiplica la ecuación $5x + 4y = 44$ por 8 y la ecuación $8x + 6y = 69$ por 5, o sea

$$8(5x + 4y) = 44(8)$$
$$5(8x + 6y) = 69(5)$$

de donde resulta

$$40x + 32y = 352$$
$$40x + 30y = 345$$

Se resta ahora la ecuación $40x + 30y = 345$ de la ecuación $40x + 32y = 352$

$$\begin{aligned} 40x + 32y &= 352 \\ \underline{40x - 30y} &\underline{= -345} \\ 2y &= 7 \\ y &= \frac{7}{2} = 3.5 \\ y &= 3.5 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor en la ecuación $5x + 4y = 44$ resulta

$$\begin{aligned} 5x + 4(3.5) &= 44 \\ 5x + 14 &= 44 \\ 5x &= 44 - 14 \\ 5x &= 44 - 14 \\ 5x &= 30 \\ x &= \frac{30}{5} = 6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Por ende

Precio de 1 kg de almendra \$6.00.
Precio de 1 kg de nuez \$3.50.

Ejemplo 12

En un juego de salón se vendieron 10 000 boletos. El precio de los boletos en la sección numerada fue de \$40.00 y en la general de \$15.00. Si el ingreso total obtenido fue de \$310 000.00, determina cuántos boletos se vendieron en la sección numerada y cuántos en la general.

Solución

Si consideramos la variable x como el número de boletos vendidos de la sección numerada y como y el número de boletos vendidos de la general, entonces las ecuaciones que resultan son

$$x + y = 10\,000$$
$$40x + 15y = 310\,000$$

Si se multiplican los miembros de la primera ecuación por 15, se obtiene

$$15x + 15y = 150\,000$$
$$40x + 15y = 310\,000$$

Al restar la primera ecuación de la segunda queda

$$\begin{array}{rcr} 40x + 15y & = & 310\,000 \\ -15x - 15y & = & -150\,000 \\ \hline 25x & = & 160\,000 \end{array}$$

$$x = \frac{160\,000}{25}$$

$$x = 6400$$

Si se sustituye este valor en la ecuación $x + y = 10\,000$ podemos obtener el valor de y

$$\begin{aligned} x + y &= 10\,000 \\ 6400 + y &= 10\,000 \\ y &= 10\,000 - 6400 \\ y &= 3600 \end{aligned}$$

Por tanto

Boletos vendidos en la sección numerada: 6400
Boletos vendidos en la sección general: 3600

Ejemplo 13

Un avión avanza con una rapidez de 600 millas por hora con el viento a favor y con una rapidez de 560 millas por hora con el viento en contra. Calcula la rapidez del viento.

Solución

Si x representa la rapidez del avión en aire tranquilo y la literal y indica la rapidez del viento, entonces tenemos este sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 600 \\ x - y &= 560 \end{aligned}$$

Al resolverlo por el método de suma y resta obtenemos

$$\begin{array}{rcr} x + y & = & 600 \\ x - y & = & 560 \\ \hline 2x & = & 1160 \end{array}$$

$$x = \frac{1160}{2}$$

$$x = 580$$

Al sustituir el valor de x que resulta en la primera ecuación obtenemos el valor de y

$$\begin{aligned} x + y &= 600 \\ 580 + y &= 600 \\ y &= 600 - 580 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Por tanto, la rapidez del aire es de 20 millas/hora.

Ejercicios

I. *Resuelve los problemas razonados siguientes, que implican un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Elige la opción correcta.)*

1. Si 12 kilogramos (kg) de papas y 6 kg de arroz cuestan \$102.00, mientras que 9 kg de papas y 13 kg de arroz cuestan \$153.00, ¿cuánto se tiene que pagar por 3 kg de papas y 2 kg de arroz?

a. \$30
b. \$32
c. \$28
d. \$36

a. \$30

2. Si 5 kilogramos (kg) de almendra y 4 kg de nuez cuestan \$30.00, mientras que 8 kg de almendra y 6 kg de nuez cuestan \$47.00, ¿cuánto cuestan 6 kg de almendra y 8 kg de nuez?

a. \$42
b. \$48
c. \$46
d. \$44

d. \$44

3. Guillermo invirtió parte de su dinero a 12% y el resto a 15%. El concepto de interés por ambas inversiones totalizó \$3000.00. Si hubiera intercambiado sus inversiones, el ingreso habría totalizado \$2940.00. ¿Qué cantidad de dinero invirtió a 15%?

a. \$10 000
b. \$14 000
c. \$13 000
d. \$12 000

d. \$12 000

4. Irma invirtió parte de su dinero a 9% y el resto a 13%. El ingreso por concepto de intereses por ambas inversiones dio un total de \$3690.00. Si hubiera intercambiado sus inversiones, el ingreso obtenido por los intereses habría sido de \$3570.00. ¿Qué cantidad invirtió a 9%?

a. \$18 000
b. \$14 000
c. \$15 000
d. \$16 000

c. \$15 000

5. En un juego de futbol de salón se vendieron 12 000 boletos. El precio de los boletos es de \$25.00 en la sección numerada y \$15.00 en la general. Si el ingreso total que se obtuvo fue de \$220 000.00, ¿cuántos boletos se vendieron de la sección numerada?

a. 5000
b. 8000
c. 9000
d. 4000

d. \$4 000

6. Al ir corriente abajo un bote promedia una velocidad de 18 kilómetros por hora (km/h). Al regresar a contracorriente, su velocidad promedio es de 8 km/h. ¿Cuál es la rapidez de la corriente de agua?

a. 6 km/h
b. 7 km/h
c. 5 km/h
d. 9 km/h

c. 5 km/h

7. Un avión puede viajar a 500 kilómetros (km) por hora con el viento a favor y a 460 km por hora con el viento en contra. Calcula la rapidez del viento.

a. 20 km/h
b. 25 km/h
c. 18 km/h
d. 22 km/h

a. 20 km/h

8. Se mezcla una solución salina al 40% con otra similar al 80% para obtener 50 litros de solución salina al 60%. ¿Cuántos litros de solución al 80% se mezclan?

a. 25
b. 20
c. 28
d. 22

a. 25

9. Se mezcla una solución salina al 30% con otra similar al 70% para obtener 40 litros de una solución salina al 60%. ¿Cuántos litros al 30% se deben mezclar?

a. 12
b. 9
c. 14
d. 10

d. 10

10. En cierto año, 8 l (l) de gasolina Magna Sin y 10 l de gasolina Premium cuestan $82.00, mientras que 4 l de gasolina Magna Sin y 7 l de gasolina Premium cuestan $51.00. ¿Cuánto cuestan 5 l de Magna Sin y 12 de Premium?

a. $85
b. $90
c. $73
d. $80

d. $80

11. Ramón invirtió en el banco $200 000 a un plazo de un año: una parte de su dinero al 8% y el resto al 10%. Si el monto total de los intereses que recibió fue de $18 400, ¿cuánto dinero invirtió al 8%?

a. $80 000
b. $75 000
c. $85 000
d. $82 000
e. $120 000

a. $80 000

12. Graciela invirtió $350 000 a un plazo de un año: una parte del dinero al 7% y el resto al 9% por año. Si por concepto de intereses recibió $28 900, ¿cuánto dinero invirtió al 9%?

a. $220 000
b. $200 000
c. $208 000
d. $205 000
e. $130 000

a. $220 000

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables

Una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$, donde a, b, c y d son números reales, con a, b y c no todos nulos, es una ecuación lineal con tres variables (x, y, z).

De la misma forma que se puede resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x, y) es posible resolver un sistema de tres ecuaciones lineales. En este caso se sugieren los pasos indicados a continuación de sistemas.

Procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables

1. Elimina una de las incógnitas tomando dos de las tres ecuaciones. Para ello se utiliza el método de suma y resta o combinación lineal que ya conoces.
2. Toma entonces la tercera ecuación que no se utilizó en el paso anterior y con cualquier otra de las ecuaciones elimina la misma incógnita por el mismo método de combinación lineal.
3. Como resultado de seguir los pasos anteriores quedará un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual puedes resolver por el método elegido y así hallar los valores de esas dos incógnitas.
4. Por último, se sustituyen los valores obtenidos de las dos incógnitas en una de las ecuaciones originales (puede ser cualquier ecuación, siempre que contenga la incógnita que falta) y se obtendrá así el valor de la tercera incógnita.

   Se tendrá entonces la solución del sistema: (x, y, z).

Igual que con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas puede tener una solución, ninguna solución o un conjunto infinito de soluciones.

Recuerda:

a. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución es *consistente-independiente*.
b. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución es *inconsistente*.
c. Si un sistema tiene un conjunto infinito de soluciones entonces es *consistente-dependiente*.

Ejemplo 4

Resuelve este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6x - 4y - 5z &= 12 \\ 4x - 2y - 3z &= 8 \\ 5x + 3y - 4z &= 4 \end{aligned}$$

Solución

Si tomamos las primeras dos ecuaciones y queremos eliminar entre ellas la incógnita z, entonces primero multiplicamos ambos miembros de la ecuación $6x - 4y - 5z = 12$ por 3, así como ambos miembros de $4x - 2y - 3z = 8$ por 5

$$\begin{aligned} 3(6x - 4y - 5z) &= 12(3) \\ 5(4x - 2y - 3z) &= 8(5) \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} 18x - 12y - 15z &= 36 \\ 20x - 10y - 15z &= 40 \end{aligned}$$

Como los coeficientes numéricos de la variable z son iguales y del mismo signo, entonces podemos restar una ecuación de la otra para eliminar dicha incógnita; en este caso restemos la primera de la segunda, de lo que se obtiene

$$\begin{array}{r} -18x + 12y + 15z = -36 \\ -20x - 10y - 15z = 40 \\ \hline 2x + \;\; 2y \qquad\quad = \;\; 4 \end{array}$$

Al dividir entre 2 resulta

$$x + y = 2$$

Si tomamos ahora la segunda y la tercera ecuaciones del sistema, entonces para eliminar la incógnita z primero se multiplica la segunda ecuación por 4 y la tercera por 3; luego

$$\begin{aligned} 4(4x - 2y - 3z) &= 8(4) \\ 3(5x + 3y - 4z) &= 4(3) \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} 16x - 8y - 12z &= 32 \\ 15x + 9y - 12z &= 12 \end{aligned}$$

Para eliminar la incógnita z restemos la ecuación

$$15x + 9y - 12z = 12 \qquad \text{de} \qquad 16x - 8y - 12z = 32$$

y entonces resulta

$$x - 17y = 20$$

De las operaciones anteriores resulta el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 2 \\ x - 17y &= 20 \end{aligned}$$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de combinación lineal, para eliminar la incógnita x restemos la ecuación $x - 17y = 20$ de $x + y = 2$, de donde resulta

$$\begin{aligned} 18y &= -18; \quad \text{por tanto} \\ y &= \frac{-18}{18} \quad \text{o sea} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Al sustituir y por su valor en la ecuación $x + y = 2$ queda

$$\begin{aligned} x + (-1) &= 2 \\ x - 1 &= 2; \qquad \text{luego} \\ x &= 2 + 1; \quad \text{o sea} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Para hallar el valor de z podemos utilizar cualquiera de las ecuaciones del sistema y sustituir las incógnitas x y y por sus valores obtenidos; por ejemplo, utilicemos la primera ecuación

$$\begin{aligned} 6x - 4y - 5z &= 12 \\ 6(3) - 4(-1) - 5z &= 12 \\ 18 + 4 - 5z &= 12 \\ 22 - 5z &= 12; \qquad \text{de donde} \\ -5z &= 12 - 22 \\ -5z &= -10 \end{aligned}$$

Al multiplicar por -1 ambos miembros de la ecuación resulta

$$\begin{aligned} 5z &= 10; \quad \text{por tanto} \\ z &= \frac{10}{5} \quad \text{o sea} \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación

Tomemos la segunda ecuación, $4x - 2y - 3z = 8$, y sustituyamos los valores obtenidos

$$\begin{aligned} 4(3) - 2(-1) - 3(2) &= 8 \\ 12 + 2 - 6 &= 8 \\ 8 &= 8 \qquad \text{(comprobado)} \end{aligned}$$

Comprobemos con la tercera ecuación

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 4z &= 4 \\ 5(3) + 3(-1) - 4(2) &= 4 \\ 15 - 3 - 8 &= 4 \\ 15 - 11 &= 4 \\ 4 &= 4 \qquad \text{(comprobado)} \end{aligned}$$

Entonces, la solución del sistema es: $(3, -1, 2)$.

Ejercicios 7

I. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes. *(Elige la opción correcta.)*

1. $x + y + z = 4$
$x - 2y - z = 1$
$2x - y - 2z = -1$

a. $(2, -1, -3)$
b. $(2, 1, 3)$
c. $(2, -1, 3)$
d. $(2, 1, -3)$

c. $(2, -1, 3)$

2. $5x + 4y + 7z = 2$
$3x - 2y + z = 0$
$x + 5y + 8z = -2$

a. $(-1, 1, 1)$
b. $(2, 1, -1)$
c. $(1, -1, 1)$
d. $(1, 1, -1)$

d. $(1, 1, -1)$

3. $2x + 5y + 2z = 5$
$3x - 2y - 3z = -1$
$2x + 3y + 3z = 10$

a. $(2, 1, -3)$
b. $(3, -1, 3)$
c. $(2, -1, 3)$
d. $(-2, -1, 3)$

c. $(2, -1, 3)$

4. $3x - 2y - z = 3$
$2x - y + z = 4$
$x - 2y + 3z = 3$

a. $(2, 1, 1)$
b. $(1, 2, 1)$
c. $(1, 1, 2)$
d. $(2, 1, -1)$

a. $(2, 1, 1)$

5. $2x + 4y + 6z = 14$
$-x + y + 4.5z = -0.5$
$-6x - 8y + 12z = -20$

a. $\left(4, 2, \frac{2}{3}\right)$

b. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

c. $\left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

d. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

d. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

6. $4x - 2y + 3z = 1$
$x + 3y - 4z = -7$
$3x + y + 2z = 5$

a. $(1, -2, 3)$
b. $(-1, 2, 3)$
c. $(-1, -2, 3)$
d. $(-1, 2, -3)$

b. $(-1, 2, 3)$

Solución de una ecuación lineal con tres incógnitas por el método de Cramer

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

De acuerdo con la regla de Cramer, el conjunto solución de este sistema está dado por

$$x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D}, \quad z = \frac{Dz}{D}, \qquad \text{con} \quad D \neq 0$$

D es el número que resulta al evaluar el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dx es el número que resulta al evaluar el determinante

$$Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Asimismo

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Y por último

$$Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Observa que los elementos del determinante D son los coeficientes numéricos de las incógnitas de cada una de las ecuaciones. Las d remplazan a las a en Dx, a las b en Dy y a las c en Dz.

Veamos ahora cómo evaluar un determinante de tercer orden.

Una forma sencilla de evaluar este tipo de determinantes es aplicar la regla de Sarrus, la cual consiste en lo siguiente.

Regla de Sarrus

Dado el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Paso 1. Se escriben debajo del tercer renglón los dos primeros renglones.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

Paso 2. Se trazan tres diagonales de derecha a izquierda y tres en sentido anterior, como se muestra a continuación

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

Paso 3. Se halla cada uno de los productos de los tres números por los que pasa cada diagonal, o sea

- $a_1b_2c_3$
- $a_2b_3c_1$
- $a_3b_1c_2$
- $a_3b_2c_1$
- $a_1b_3c_2$
- $a_2b_1c_3$

Paso 4. Se resta la suma de los productos de los números que están colocados en las diagonales trazadas de izquierda a derecha, de abajo arriba, de la suma de los productos de los números que están colocados en las diagonales trazadas de izquierda a derecha y de arriba abajo

Paso 5. El número que resulta del paso anterior es el número que corresponde al determinante.

En seguida se presenta un ejemplo.

Ejemplo 15

Resuelve por la regla de Cramer el sistema

$$\begin{aligned} 6x - 4y - 5z &= 12 \\ 4x - 2y - 3z &= 8 \\ 5x + 3y - 4z &= 4 \end{aligned}$$

Solución

Calculemos primero el valor del determinante D

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la regla de Sarrus tenemos

$$\begin{array}{ccc} 6 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \end{array}$$

$$D = 6(-2)(-4) + 4(3)(-5) + 5(-4)(-3) - [4(-4)(-4) + 6(3)(-3) + 5(-2)(-5)]$$
$$D = 48 - 60 + 60 - [64 - 54 + 50]$$
$$D = 48 - 60$$
$$D = -12$$

Calculemos a continuación el valor de Dx

$$Dx = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -5 \\ 8 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 12 & -4 & -5 \\ 8 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 12 & -4 & -5 \\ 8 & -2 & -3 \end{array}$$

$$Dx = 96 - 120 + 48 - [128 - 108 + 40]$$
$$Dx = 24 - [-60]$$
$$Dx = -36$$

De acuerdo con lo anterior, $x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-36}{-12}$; luego

$$x = 3$$

Evaluemos a continuación el determinante Dy

$$Dy = \begin{vmatrix} 6 & 12 & -5 \\ 4 & 8 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \\ 6 & 12 & -5 \\ 4 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la regla de Sarrus tenemos

$$\begin{array}{ccc} 6 & 12 & -5 \\ 4 & 8 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \\ 6 & 12 & -5 \\ 4 & 8 & -3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
Dy &= 6(8)(-4) + 4(4)(-5) + 5(12)(-3) - [4(12)(-4) + 6(4)(-3) + 5(8)(-5)] \\
Dy &= -192 - 80 - 180 - [-192 - 72 - 200] \\
Dy &= -452 - [-464] \\
Dy &= -452 + 464 \\
Dy &= 12
\end{aligned}$$

De donde

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{12}{-12}; \quad \text{luego}$$

$$y = -1$$

Hallemos a continuación el valor de Dz

$$Dz = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la regla de Sarrus tenemos

$$\begin{array}{ccc} 6 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
Dz &= 6(-2)(4) + 4(3)(12) + 5(-4)(8) - [4(-4)(4) + 6(3)(8) + 5(-2)(12)] \\
Dz &= -48 + 144 - 160 - [-64 + 144 - 120] \\
Dz &= -64 - [-40] \\
Dz &= -64 + 40 \\
Dz &= -24; \quad \text{luego} \\
z &= \frac{Dz}{D} = \frac{-24}{-12} = 2 \\
z &= 2
\end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned}
6x - 4y - 5z &= 12 \\
6(3) - 4(-1) - 5(2) &= 12 \\
18 + 4 - 10 &= 12 \\
12 &= 12
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
4x - 2y - 3z &= 8 \\
4(3) - 2(-1) - 3(2) &= 8 \\
12 + 2 - 6 &= 8 \\
14 - 6 &= 8
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
5x + 3y - 4z &= 4 \\
5(3) + 3(-1) - 4(2) &= 4 \\
15 - 3 - 8 &= 4 \\
4 &= 4
\end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es la terna ordenada:

$$\begin{array}{ccc} (3, & -1, & 2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & z \end{array}$$

Ejercicios 7

I. *Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por la regla de Cramer. (Elige la opción correcta.)*

1. $3x - 4y - 6z = -16$
   $4x - y - z = 5$
   $x - 3y - 2z = -2$

   a. (2, −2, 5)
   b. (2, 2, −5)
   c. (−2, 2, 5)
   d. (−2, −2, 5)

a. (2, −2, 5)

2. $\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 16 \\ 2x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$

a. $(-2, 6, -1)$
b. $(-2, 5, -1)$
c. $(-2, 6, 1)$
d. $(2, 6, 1)$

c. $(-2, 6, 1)$

3. $4x - 2y - 3z = 8$
$5x + 3y - 4z = 4$
$6x - 4y - 5z = 12$

a. $(3, 1, -2)$
b. $(-3, 1, 2)$
c. $(3, -1, -2)$
d. $(3, -1, 2)$

d. $(3, -1, 2)$

4. $x + 2y - 3z = -20$
$3x + y + 2z = -1$
$2x - 2y + 3z = 14$
$2x - 2y + 3z = 14$

a. $(-2, -3, 4)$
b. $(-2, 3, -4)$
c. $(2, -3, -4)$
d. $(2, 3, 4)$

a. $(-2, -3, 4)$

II. *Resuelve los ejercicios siguientes. (Elige la opción correcta.)*

5. Una fábrica de muebles produce tres tipos de sillones: el infantil (I), el normal (N) y el de lujo (L). El proceso de producción de cada pieza consta de tres etapas: corte, construcción y acabado. El tiempo en horas (h) que se requiere para cada etapa se muestra en la tabla siguiente:

	Infantil (I)	*Normal (N)*	*De lujo (L)*
Corte	5 h	7 h	8 h
Construcción	4 h	5 h	7 h
Acabado	2 h	3 h	4 h

Si la empresa dispone semanalmente de un máximo de 206 horas para el corte, 163 para la construcción y 92 para el acabado, ¿cuántos sillones de cada tipo se pueden producir si el equipo de obreros opera a su capacidad máxima?

a. $I = 9$ $N = 11$ $L = 8$
b. $I = 8$ $N = 13$ $L = 6$
c. $I = 10$ $N = 12$ $L = 9$
d. $I = 15$ $N = 10$ $L = 12$

c. $I = 10$ $N = 12$ $L = 9$

6. Se mezclan tres soluciones de ácido clorhídrico a 25, 40 y 60%, respectivamente, para obtener 100 litros (l) de una solución a 39%. Si el volumen de la solución a 40% es cinco litros menor que el de la solución a 25%, ¿cuántos litros de cada solución se mezclan?

a. A 25% = 40; A 40% = 35; A 60% = 25
b. A 25% = 50; A 40% = 20; A 60% = 30
c. A 25% = 35; A 40% = 25; A 60% = 40
d. A 25% = 30; A 40% = 45; A 60% = 25

a. A 25% = 40; A 40% = 35; A 60% = 25

Evaluación

I. *Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que se indica.*

1. $2x - y = -3$ (*por sustitución*)
$5x - 6y = 10$

a. $(-2, -7)$
b. $(-4, -5)$
c. $(4, 6)$
d. $(-5, -4)$
e. $(-6, 4)$

b. $(-4, -5)$

2. $3x + 2y = 10$ (*por eliminación*)
$2x + 5y = 3$

a. $(4, -1)$
b. $(-1, 4)$
c. $(4, -2)$
d. $(-2, 4)$
e. $(1, 4)$

a. $(4, -1)$

3. $4x - y = 5$ (*por igualación*)
$7x - 2y = 7$

a. (3, 9)
b. (9, 3)
c. (3, 7)
d. (3, 5)
e. (7, 3)

c. (3, 7)

4. $2x + 3y = 18$ (*por determinantes*)
$5x - y = 11$

a. (−2, 1)
b. (4, 3)
c. (1, −2)
d. (3, 4)
e. (3, 6)

d. (3, 4)

II. *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:*

5. $2x - 3y + 5z = -8$
$3x + 2y - z = -3$
$4x + y + 6z = 4$

a. (−3, 5, 2)
b. (3, −4, 2)
c. (−3, 4, 2)
d. (2, 4, −3)
e. (−3, 2, 4)

c. (3, −4, 2)

III. *Resuelve los siguientes problemas razonados que implican un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Elige la opción correcta.)*

6. Si 10 kilogramos (kg) de papas y 5 kg de arroz cuestan \$55.00, mientras que 7 kg de papas y 13 de arroz cuestan \$67.00, ¿cuál es el precio por kilogramo de arroz?

a. \$4.00
b. \$5.00
c. \$3.50
d. \$6.00
e. \$3.00

7. Si 10 kilogramos de papas y 5 kg de arroz cuestan \$55.00, mientras que 7 kg de papas y 13 de arroz cuestan \$67.00, ¿cuál es el precio de un kilogramo de papas?

a. \$4.00
b. \$5.00
c. \$3.50
d. \$6.00
e. \$3.00

8. Guillermo invirtió parte de su dinero a 8% y el resto a 12%. El ingreso por ambas inversiones totalizó $2 440.00. Si hubiera intercambiado sus inversiones, el ingreso habría totalizado $2 760.00. ¿Cuánto dinero invirtió a 8%?

a. $20 000.00
b. $17 000.00
c. $8 000.00
d. $18 000.00
e. $7 500.00

9. Guillermo invirtió parte de su dinero a 8% y el resto a 12%. El ingreso por ambas inversiones totalizó $2 440.00. Si hubiera intercambiado sus inversiones, el ingreso habría totalizado $2 760.00. ¿Cuánto dinero invirtió a 12%?

a. $9 000.00
b. $10 000.00
c. $7 500.00
d. $9 500.00
e. $12 000.00

10. Un avión puede viajar a 540 millas por hora (mi/h) con el viento a favor y a 490 millas por hora con el viento en contra. Calcula la velocidad del avión en aire tranquilo.

a. 520 mi/h
b. 507 mi/h
c. 500 mi/h
d. 535 mi/h
e. 515 mi/h

e. 515 mi/h

11. Un avión puede viajar a 540 millas por hora (mi/h) con el viento a favor y a 490 millas por hora con el viento en contra. Calcula la velocidad del viento.

a. 18 mi/h
b. 30 mi/h
c. 25 mi/h
d. 34 mi/h
e. 40 mi/h

c. 25 mi/h

12. Se mezcla una solución salina a 50% con otra similar a 75% para obtener 60 litros (l) de solución salina a 60%. ¿Cuántos litros de solución a 50% se deben mezclar?

a. 24
b. 27
c. 33
d. 36
e. 32

13. Se mezcla una solución salina a 50% con otra similar al 75% para obtener 60 litros (l) de solución salina a 60%. ¿Cuántos litros de solución a 75% se deben mezclar?

a. 24
b. 32
c. 33
d. 36
e. 28

14. Jorge invirtió \$460 000 a un plazo de un año en una institución financiera, una parte a 8% de interés anual y la otra a 11%. Si por concepto de interés anual recibió \$44 600, ¿cuánto dinero invirtió a 11%?

a. \$260 000
b. \$320 000
c. \$230 000
d. \$200 000
e. \$250 000

a. \$260 000

14

Ecuaciones cuadráticas

Definición de conceptos

Expresión general de una ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática, llamada también *de segundo grado con una incógnita*, es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$; por ejemplo, la siguiente es una ecuación cuadrática o de segundo grado: $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Ecuación cuadrática pura

Una ecuación cuadrática pura es aquella que carece del término en x; por ejemplo, $5x^2 - 80 = 0$. En general, toda ecuación de este tipo es de la forma $ax^2 + c = 0$, donde a y c son constantes y a es diferente de cero.

Ecuación cuadrática mixta

Es la ecuación cuadrática que carece del término constante; por ejemplo, $x^2 + 7x = 0$. Toda ecuación de este tipo tiene la forma $ax^2 + bx = 0$, con a y b constantes y ambas diferentes de cero.

Número de raíces de una ecuación cuadrática

El conjunto solución de una ecuación cuadrática consta, a lo sumo, de dos raíces.

Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Solución de ecuaciones cuadráticas puras

Se presentan los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas de las formas $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, primero se despeja la x^2, a continuación se obtiene la raíz cuadrada de ambos miembros y luego se resuelve la ecuación con valor absoluto que resulta.

Por ejemplo, si tenemos $x^2 - 64 = 0$, entonces

$$x^2 = 64$$

Al extraer la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación queda

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$$
$$|x| = 8,$$

de donde resulta: $x = 8$ o $x = -8$.

Si S representa el conjunto solución de $x^2 - 64 = 0$, entonces

$$S = \{-8, 8\}$$

A veces este tipo de ecuaciones puede resolverse por factorización, cuando la expresión $ax^2 + c$ puede descomponerse en factores. En este caso dicha expresión se factoriza y se iguala cada factor a cero.

Las soluciones de cada ecuación forman el conjunto solución de la ecuación cuadrática, por ejemplo:y

$$4x^2 - 25 = 0$$
$$(2x - 5)(2x + 5) = 0$$

Al despejar la x en ambas ecuaciones resulta

$$2x - 5 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 5 = 0$$
$$x = \frac{5}{2} \qquad\qquad x = -\frac{5}{2}$$

Si S representa el conjunto solución, entonces

$$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$

Este tipo de ecuaciones se resuelven fácilmente por factorización al descomponer en factores la expresión $ax^2 + bx$.

Como la x es factor común de la expresión anterior, tenemos que

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$

Al aplicar la propiedad multiplicativa resulta

$$x = 0 \quad \text{o} \quad ax + b = 0$$

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $6x^2 + 30x = 0$.

Solución

$$6x^2 + 30x = 0$$

$$x(6x + 30) = 0, \qquad \text{de donde}$$

$$x = 0; \quad 6x + 30 = 0$$

$$6x = -30$$

$$x = \frac{-30}{6}$$

$$x = -5; \qquad \text{luego}$$

$$S = \{0, -5\}$$

Ejercicios 1

I. *Resuelve las ecuaciones cuadráticas incompletas que siguen. (Elige la opción correcta.)*

1. $x^2 + 6x = 0$

a. $\{6\}$
b. $\{-6\}$
c. $\{0, 6\}$
d. $\{0, -6\}$

d. $\{0, -6\}$

2. $2x^2 - 14x = 0$

a. $\{7\}$
b. $\{-7\}$
c. $\{0, 7\}$
d. $\{0, -7\}$

c. $\{0, 7\}$

3. $x^2 - x = 0$

a. $S = \{0, 1\}$
b. $S = \{0, -1\}$
c. $S = \{1\}$
d. $S = \{-1\}$

a. $S = \{0, 1\}$

4. $5x^2 + 20x = 0$

a. $S = \{-4\}$
b. $S = \{4\}$
c. $S = \{0, 4\}$
d. $S = \{0, -4\}$

d. $S = \{0, -4\}$

5. $4x^2 - 20x = 0$

a. $\{0, 5\}$
b. $\{0, -5\}$
c. $\{5\}$
d. $\{-5\}$

a. $\{0, 5\}$

6. $2x^2 + 4x = 0$

a. $S = \{2\}$
b. $S = \{-2\}$
c. $S = \{0, -2\}$
d. $S = \{0, 2\}$

c. $S = \{0, -2\}$

7. $x^2 - 81 = 0$

a. $S = \{9, -9\}$
b. $S = \{-9\}$
c. $S = \{9\}$
d. $S = \{0, 9\}$

a. $S = \{9, -9\}$

8. $2x^2 - 98 = 0$

a. $\{7\}$
b. $\{-7, 7\}$
c. $\{-7\}$
d. $\{0, 7\}$

b. $\{-7, 7\}$

9. $3x^2 - 42 = 0$

a. $S = \{-3.74, 3.74\}$
b. $S = \{-3.5, 3.5\}$
c. $S = \{-3.6, 3.6\}$
d. $S = \{3.74\}$

a. $S = \{-3.74, 3.74\}$

10. $2x^2 - 5 = 0$

a. $S = \{-1.62, 1.62\}$
b. $S = \{-1.47, 1.47\}$
c. $S = \{-1.58, 1.58\}$
d. $S = \{-1.7, 1.7\}$

c. $S = \{-1.58, 1.58\}$

11. $4x^2 - 1 = 0$

a. $S = \{-0.5, 0.5\}$
b. $S = \{-0.25, 0.25\}$
c. $S = \{-0.6, 0.6\}$
d. $S = \{-0.35, 0.35\}$

a. $S = \{-0.5, 0.5\}$

12. $5x^2 - 4 = 0$

a. $S = \{-0.96, 0.96\}$
b. $S = \{-0.72, 0.72\}$
c. $S = \{-0.894, 0.894\}$
d. $S = \{-0.894\}$

c. $S = \{-0.894, 0.894\}$

Resolución de ecuaciones cuadráticas completas

Entre los métodos que se utilizan para resolver ecuaciones cuadráticas completas se encuentran los siguientes:

- Factorización.
- Completar un trinomio cuadrado perfecto.
- Fórmula general.

A continuación se explican los pasos de que consta cada uno de ellos.

Método de factorización

Para resolver una ecuación cuadrática completa por este método se requiere que la ecuación esté escrita en su forma general o normal. El método consiste en descomponer en factores la expresión $ax^2 + bx + c$, igualar cada factor a cero y después resolver cada ecuación para x. Las soluciones de las ecuaciones que resultan de igualar a cero cada factor forman el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 2

Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes por el método de factorización.

a. $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución

$$(x-4)(x-3) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 3; \quad \text{o sea}$$
$$S = \{3, 4\}$$

b. $x^2 - 3x - 10 = 0$

Solución

$$(x-5)(x+2) = 0$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0; \qquad \text{de donde resulta}$$
$$x = 5 \quad \text{o} \quad x = -2$$
$$S = \{-2, 5\}$$

Ejercicios 2

I. *Resuelve estas ecuaciones cuadráticas por factorización. (Elige la opción correcta.)*

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

a. $S = \{6, 1\}$
b. $S = \{2, 3\}$
c. $S = \{-2, -3\}$
d. $S = \{-1, 6\}$

b. $S = \{2, 3\}$

2. $x^2 - 5x - 14 = 0$

a. $S = \{-2, -7\}$
b. $S = \{-2, 7\}$
c. $S = \{-7, 2\}$
d. $S = \{-14, 1\}$

b. $\{-2, 7\}$

3. $x^2 + x - 20 = 0$

a. $S = \{-4, 5\}$
b. $S = \{10, -2\}$
c. $S = \{-10, 2\}$
d. $S = \{-5, 4\}$

d. $S = \{-5, 4\}$

4. $x^2 + 3x - 4 = 0$

a. $S = \{-4, 1\}$
b. $S = \{-1, -4\}$
c. $S = \{-1, 4\}$
d. $S = \{1, 4\}$

b. $S = \{2, 3\}$

5. $x^2 - 7x + 10 = 0$

a. $S = \{2, 5\}$
b. $S = \{1, 10\}$
c. $S = \{-1, -10\}$
d. $S = \{-2, -5\}$

a. $S = \{2, 5\}$

6. $x^2 - 3x - 18 = 0$

a. $S = \{-6, 3\}$
b. $S = \{-9, 2\}$
c. $S = \{-3, 6\}$
d. $S = \{3, 6\}$

c. $S = \{-3, 6\}$

7. $x^2 - 2x - 24 = 0$

a. $S = \{-3, 8\}$
b. $S = \{-6, 4\}$
c. $S = \{-4, 6\}$
d. $S = \{-8, 3\}$

b. $\{-2, 7\}$

8. $x^2 - 7x - 18 = 0$

a. $S = \{-2, 9\}$
b. $S = \{-6, 3\}$
c. $S = \{-9, 2\}$
d. $S = \{-3, 6\}$

d. $S = \{-5, 4\}$

9. $3x^2 + x - 10 = 0$

a. $\left\{-2, -\frac{5}{3}\right\}$

b. $\left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$

c. $\left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$

d. $\left\{2, \frac{5}{3}\right\}$

b. $\left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$

10. $2x^2 - x - 21 = 0$

a. $\left\{-3, \frac{5}{2}\right\}$

b. $\left\{3, -\frac{7}{2}\right\}$

c. $\left\{-3, \frac{7}{2}\right\}$

d. $\left\{3, -\frac{5}{2}\right\}$

c. $\left\{-3, \frac{7}{2}\right\}$

Método de completar un trinomio cuadrado perfecto

Explicaremos este método con el apoyo del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación $3x^2 + 2x - 8 = 0$ por el método de completar al cuadrado.

Solución

Paso 1. Divide ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de x^2, en este caso 3

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{3} = \frac{0}{3}, \text{ de donde resulta}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x = -\frac{8}{3} = 0$$

Paso 2. Transpón el término constante de la ecuación anterior al miembro derecho (obviamente, con signo contrario)

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$$

Paso 3. Suma a ambos miembros de la ecuación anterior un número tal que en el miembro izquierdo se forme un trinomio cuadrado perfecto. Para hacerlo divide entre 2 el coeficiente de x y eleva al cuadrado el cociente obtenido

$$\frac{2}{3} \div 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Paso 4. Factoriza el trinomio cuadrado perfecto del miembro izquierdo y simplifica el lado derecho de la ecuación

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{3}+\frac{1}{9}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24+1}{9}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

Paso 5. Si el número que aparece en el miembro derecho es positivo, extrae la raíz cuadrada en ambos miembros y resuelve la ecuación con el valor absoluto que resulta.*

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\left|x+\frac{1}{3}\right|=\frac{5}{3} \qquad \text{de donde resulta:}$$

$$x+\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \quad \text{o} \quad x+\frac{1}{3}=\frac{-5}{3}$$

$$x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x=\frac{-5}{3}-\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad x=\frac{-6}{3}$$

$$x=-2$$

Comprobación

Tenemos la ecuación original $3x^2+2x-8=0$. Si $x=-2$, entonces

$$3(-2)^2+2(-2)-8=0$$
$$3(4)-4-8=0$$
$$12-12=0$$
$$12=12$$

De nuevo, tenemos la ecuación original $3x^2+2x-8=0$. Si ahora $x=\frac{4}{3}$

$$3\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\left(\frac{4}{3}\right)-8=0$$

$$3\left(\frac{16}{9}\right)+\frac{8}{3}-8=0$$

$$\left(\frac{16}{3}+\frac{8}{3}\right)-8=0$$

$$\frac{24}{3}-8=0$$

$$8-8=0; \qquad \text{luego}$$

$$S=\left\{-2,\ \frac{4}{3}\right\}$$

* Si el número que aparece en el lado derecho fuera negativo, la ecuación no tendría solución para el conjunto de los números reales, ya que todo número real elevado al cuadrado es positivo.

Ejercicios 3

I. *Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.*

1. $x^2 - 8x - 20 = 0$

2. $2x^2 - 11x + 15 = 0$

3. $3x^2 - 24x + 45 = 0$

Método de solución por fórmula general

Por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto es posible deducir una fórmula que se utiliza para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Esa fórmula se conoce con el nombre de *fórmula general*.

Para obtenerla resolveremos, completando el cuadrado, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes y $a \neq 0$. Tenemos entonces

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Paso 1. Divide ambos miembros de la ecuación entre a.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}, \text{ de donde resulta}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Paso 2. Transpón el término $\frac{c}{A}$ al miembro derecho con signo contrario

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Paso 3. En ambos miembros de la ecuación anterior suma el término algebraico que se requiere para que se forme un trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo. Para hacerlo, divide entre 2 el coeficiente de x y elévalo al cuadrado

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Paso 4. Factoriza el lado izquierdo de la ecuación anterior y simplifica la expresión del lado derecho

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Paso 5. Extrae la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación y resuelve para x

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{de donde resulta}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En suma, tenemos lo siguiente.

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante de una ecuación cuadrática y el carácter de sus raíces

El discriminante (d) de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, está dado por la expresión $d = b^2 - 4ac$.

Importancia del discriminante

La importancia del discriminante de una ecuación cuadrática es que su valor proporciona el número y la naturaleza de las raíces de dicha ecuación.

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales.
2. Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces no son reales.
3. Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto diferente de cero, las raíces son reales, racionales y de diferente valor.
4. Si $b^2 - 4ac > 0$, pero no es cuadrado perfecto, las raíces son reales, irracionales y de diferente valor.

Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula general se sugiere realizar lo siguiente:

1. Escribe la ecuación cuadrática en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en caso de ser necesario.
2. Determina los valores numéricos de a, b, $-b$ y c.
3. Evalúa el discriminante (d) para determinar si la ecuación tiene o no solución para el conjunto de los números reales, el número y la naturaleza de sus raíces.
4. Sustituye los valores de a, $-b$ y d en la fórmula y después evalúa dicha expresión para obtener el conjunto solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes por la fórmula general.

a. $3x^2 + 17x - 28 = 0$

Solución

Calcula primero el valor del discriminante.

$$d = b^2 - 4ac, \text{ donde } a = 3,\ b = 17 \text{ y } c = -28. \text{ Por tanto}$$

$$d = (17)^2 - 4(3)(-28)$$
$$d = 289 + 336$$
$$d = 625$$

Como el discriminante es un cuadrado perfecto $\left(\sqrt{625} = 25\right)$ las raíces de la ecuación son reales, racionales y diferentes.

Ahora apliquemos la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{625}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-17 \pm 25}{6}$$

de donde

$$x_1 = \frac{-17 + 25}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{-17 - 25}{6} = \frac{-42}{6} = -.$$

$$x_1 = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = -7$$

Por tanto

$$S = \left\{-7, \ \frac{4}{3}\right\}$$

b. $-3x^2 + 2x - 9 = 0$.

Solución

Calculemos el valor del discriminante $d = b^2 - 4ac$, donde $a = -3$, $b = 2$ y $c = -9$

$$\begin{aligned} d &= (2)^2 - 4(-3)(-9) \\ d &= 4 - 108 \\ d &= -104 \end{aligned}$$

Como el discriminante es negativo, las raíces de la ecuación no son reales. Es decir, para el conjunto de los números reales la solución de esta ecuación es $\varnothing$ (el conjunto vacío).

c. $5x^2 - 12x + 3 = 0$.

Solución

Calculemos primero el valor del discriminante $d = b^2 - 4ac$, donde $a = 5$, $b = -12$ y $c = 3$

$$\begin{aligned} d &= (-12)^2 - 4(5)(3) \\ d &= 144 - 60 \\ d &= 84 \end{aligned}$$

Como el discriminante es positivo y no es cuadrado perfecto, las raíces de la ecuación son reales, irracionales y diferentes. Ahora aplicamos la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{84}}{2(5)}$$

$$x = \frac{12 \pm 9.165}{10}$$

$$x_1 = \frac{12 + 9.165}{10}$$

$$x_2 = \frac{12 - 9.165}{10}$$

$$x_1 = 2.116 \quad \text{y} \quad x_2 = 0.283$$

$$S = \{2.116, 0.283\}$$

d. $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Solución

Tenemos que el discriminante $d = b^2 - 4ac$ es

$$\begin{aligned} d &= (-10)^2 - 4(1)(25) \\ d &= 100 - 100 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Como el discriminante es cero, las raíces de la ecuación son reales e iguales; en otras palabras, el conjunto solución es una raíz doble, y como los coeficientes son constantes enteros, esta raíz es racional. Aplicamos entonces la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{10 \pm 0}{2(1)} = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

$$S = \{5\} \quad \text{(raíz doble.)}$$

Ejercicios 4

I. *Halla el valor del discriminante de las ecuaciones cuadráticas siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

a. 14
b. 15
c. 13
d. 37

c. 13

3. $x^2 - 10x + 25 = 0$

a. -80
b. -200
c. 200
d. 0

d. 0

5. $4x^2 - 6x + 11 = 0$

a. -140
b. 212
c. -164
d. -144

d. -140

2. $2x^2 - 8x + 3 = 0$

a. -8
b. 40
c. 42
d. 38

b. 40

4. $x^2 + 3x - 10 = 0$

a. -31
b. 48
c. 52
d. 49

d. 49

6. $x^2 - 6x + 9 = 0$

a. -24
b. 0
c. 24
d. 72

b. 0

II. *Determina la naturaleza de las raíces de cada una de las ecuaciones cuadráticas siguientes. Relaciona correctamente las columnas.*

7. (c) $x^2 + 24x + 140 = 0$
8. (a) $x^2 + 16x + 64 = 0$
9. (c) $2x^2 + 9x - 5 = 0$
10. (b) $x^2 - 3x + 10 = 0$
11. (c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
12. (b) $x^2 - 2x - 8 = 0$
13. (a) $x^2 + 18x + 81 = 0$
14. (d) $2x^2 - 7x - 5 = 0$
15. (b) $x^2 - 6x + 25 = 0$
16. (a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

a. Reales e iguales.

b. Complejas.

c. Reales, racionales y de diferente valor.

d. Reales, irracionales y de diferente valor.

III. *Determina el conjunto solución de estas ecuaciones cuadráticas, si sus elementos son números reales. (Elige la opción correcta.)*

17. $x^2 - 5x - 36 = 0$

a. $S = \{-4, -9\}$
b. $S = \{4, -9\}$
c. $S = \{-4, 9\}$
d. $S = \{4, 9\}$

c. $S = \{-4, 9\}$

18. $6x^2 - 17x + 10 = 0$

a. $S = \left\{\frac{5}{6}, 2\right\}$

b. $S = \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

c. $S = \left\{-\frac{5}{6}, -2\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

e. $S = \left\{\frac{5}{6}, -2\right\}$

a. $S = \left\{\frac{5}{6}, 2\right\}$

19. $x^2 - 6x + 27 = 0$

a. $\varnothing$
b. $S = \{-1, 7\}$
c. $S = \{-7, 1\}$
d. $S = \{-1, -7\}$
e. $S = \{1, 7\}$

a. $\varnothing$

20. $5x^2 - 11x - 12 = 0$

a. $S = \left\{-3, \frac{4}{5}\right\}$

b. $S = \left\{-\frac{4}{5}, -3\right\}$

c. $S = \left\{-\frac{4}{5}, 2\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{4}{5}, 3\right\}$

21. $2x^2 - 7x - 5 = 0$

a. $S = \{-0.7, 5.2\}$
b. $S = \{0.61, -4.1\}$
c. $S = \{-0.61, -4.1\}$
d. $S = \{-0.61, 4.1\}$
e. $S = \{-5.2, 0.7\}$

d. $S = \{-0.61, 4.1\}$

22. $3x^2 - 2x + 5 = 0$

a. $S = \{-0.91, 1.58\}$

b. $s = \left\{\frac{5}{3}, -1\right\}$

c. $\varnothing$
d. $S = \{-1.58, 0.91\}$

23. $16x^2 + 8x - 3 = 0$

a. $S = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

b. $S = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

c. $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$

b. $S = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

24. $5x^2 + 11x + 2 = 0$

a. $S = \left\{-\frac{1}{5}, -2\right\}$

b. $S = \left\{\frac{1}{5}, 2\right\}$

c. $S = \left\{-2, \frac{1}{5}\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{1}{5}, 2\right\}$

a. $S = \left\{-\frac{1}{5}, -2\right\}$

25. $x^2 + 4x - 7 = 0$

a. $S = \{-5.3, 1.3\}$
b. $S = \{-4.2, 1.5\}$
c. $S = \{-1.5, -4.2\}$
d. $S = \{-5.3, -1.3\}$

a. $S = \{-5.3, 1.3\}$

26. $2x^2 - 11x - 6 = 0$

a. $S = \{0.5, 6\}$
b. $S = \{-0.5, -6\}$

c. $S = \left\{-\frac{1}{2}, 6\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{1}{2}, -6\right\}$

c. $S = \left\{-\frac{1}{2}, 6\right\}$

27. $x^2 + 14x + 49 = 0$

a. $S = \{7\}$ (raíz doble)
b. $S = \{-7\}$ (raíz doble)
c. $S = \{-7, 7\}$
d. $S = \varnothing$

b. $S = \{-7\}$ (raíz doble)

28. $3x^2 + 8x - 3 = 0$

a. $S = \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$

b. $S = \{-3, 3\}$

c. $S = \left\{-3, -\frac{1}{3}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$

a. $S = \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$

29. $2x^2 - 3x = 35$

a. $S = \{-3.5, -5\}$

b. $S = \left\{\frac{7}{2}, -5\right\}$

c. $S = \left\{-\frac{7}{2}, 4\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{7}{2}, 5\right\}$

e. $S = \left\{\frac{7}{2}, 5\right\}$

d. $S = \left\{-\frac{7}{2}, 5\right\}$

30. $49x^2 - 56x + 16 = 0$

a. $\varnothing$

b. $S = \left\{-\frac{4}{7}\right\}$ (raíz doble)

c. $S = \left\{-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$ (raíz doble)

d. $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$ (raíz doble)

31. $3x^2 = 7x - 4$

a. $S = \left\{-1, -\frac{4}{3}\right\}$ *b.* $S = \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$ *c.* $S = \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ *d.* $S = \left\{-\frac{4}{3}, 1\right\}$

b. $S = \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$

Relaciones entre los coeficientes de una ecuación cuadrática y sus raíces

Es posible demostrar que si x_1 y x_2 son las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Demostremos a continuación las relaciones anteriores. De acuerdo con la fórmula general tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}, \text{ donde } d = b^2 - 4ac$$

Entonces, si $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{d}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ tenemos que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}\right)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{d} - b - \sqrt{d}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

es decir

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Asimismo, al multiplicar las raíces resulta

$$x_1x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}\right) \quad \text{de donde}$$

$$x_1x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{d}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1x_2 = \frac{b^2 - d}{4a^2}$$

Como $d = b^2 - 4ac$, entonces

$$x_1x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{luego}$$

$$x_1x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 5 *a*. Determina la suma y el producto de las raíces de la ecuación $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

Solución

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ luego}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8}{3}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{-3}{3}, \text{ de donde resulta.}$$

$$x_1x_2 = -1$$

Ejercicios 5

I. *En cada una de las ecuaciones cuadráticas siguientes, halla lo que se indica. Relaciona correctamente las columnas.*

1. ( ) Halla la suma de las raíces de la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$.	*a.* -1
2. ( ) Halla el producto de las raíces de la ecuación $4x^2 - 5x - 36 = 0$.	*b.* $\frac{3}{2}$
3. ( ) Halla la suma de las raíces de la ecuación $16x^2 + 8x - 3 = 0$.	*c.* $-\frac{3}{2}$
4. ( ) Halla el producto de las raíces de la ecuación $3x^2 + 8x - 3 = 0$.	*d.* 2
5. ( ) Halla la suma de las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x - 35 = 0$.	*e.* $-\frac{1}{2}$
6. ( ) Halla el producto de las raíces de la ecuación $6x^2 - 11x - 12 = 0$.	*f.* $\frac{1}{2}$
7. ( ) Halla la suma de las raíces de la ecuación $x^2 - 9x - 16 = 0$.	*g.* $-\frac{5}{3}$
8. ( ) Halla el producto de las raíces de la ecuación $6x^2 - 17x + 10 = 0$.	*h.* -9
	i. 9
	j. $\frac{5}{3}$
	k. -2

Números complejos

Sabemos que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Por ejemplo, $\sqrt{-9}$ no es un número real, ya que no existe ningún número de este conjunto tal que al multiplicarse por sí mismo el producto sea -9.

Por ello, el conjunto de los números reales R se ha ampliado para formar un conjunto numérico nuevo, el *conjunto de los números complejos*, que se representa con la letra C. Esto se debe a que los números de este tipo tienen muchas aplicaciones en el campo de la física y otras disciplinas.

Llamamos i a la raíz cuadrada de -1, es decir, $i = \sqrt{-1}$. Así podemos escribir el número $\sqrt{-4}$, por ejemplo, como $2i$, ya que $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$.

Valor de i

En general, para cualquier número entero positivo n,

$$\sqrt{-n} = i\sqrt{n} \quad \text{es decir,} \quad \sqrt{-n} = \sqrt{n}\sqrt{-1}$$

Por ejemplo

$$\sqrt{-16} = 4i$$
$$\sqrt{-25} = 5i$$
$$\sqrt{-81} = 9i$$

Cualquier número de la forma bi, donde b es un número real diferente de cero, se llama *número imaginario* e $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*.

En todo número complejo de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, a es la parte real y bi la parte imaginaria.

Por tanto, el conjunto de los números complejos resulta de la unión de los números reales (R) con los imaginarios (I).

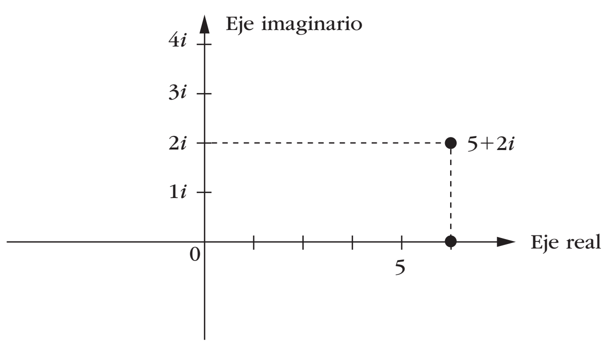
Representación gráfica de un número complejo

Para representar un número complejo o, dicho de otra manera, un número de la forma $a + bi$, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares, en el cual la parte real se representa en el eje horizontal y la imaginaria en el eje vertical.

Ejemplo 6 Representa gráficamente los números complejos siguientes.

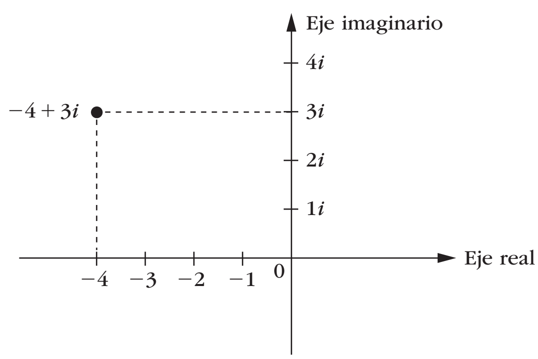
a. $5 + 2i$

Solución



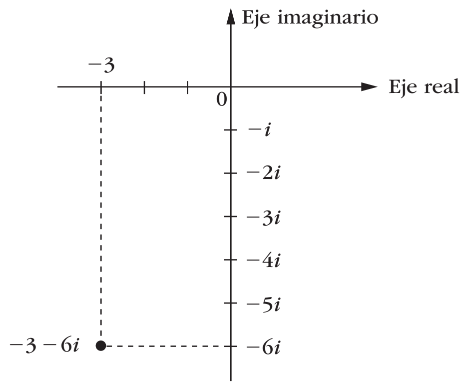
b. $-4 + 3i$

Solución



c. $-3 - 6i$

Solución



Suma, resta y multiplicación de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

$$\text{Suma} \quad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + bi + c + di \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

$$\text{Resta} \quad \begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= a + bi - c - di \\ &= a - c + bi - di \\ &= (a - c) + (bi - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

$$\text{Multiplicación} \quad \begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, ya que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 7

Efectúa las operaciones entre números complejos que se indican.

a. $(15 + 6i) + (-5 - 14i)$

Solución

$$\begin{aligned} (15 + 6i) + (-5 - 14i) &= 15 + 6i - 5 - 14i \\ &= (15 - 5) + (6i - 14i) \\ &= 10 + (-8i) \\ &= 10 - 8i \end{aligned}$$

b. $(13 - 10i) - (10 - 2i)$

Solución

$$\begin{aligned}(13 - 10i) - (10 - 2i) &= 13 - 10i - 10 + 2i\\ &= (13 - 10) + (-10i + 2i)\\ &= 3 + (-8i)\\ &= 3 - 8i\end{aligned}$$

c. $(7 + 4i)(2 - 5i)$

Solución

$$\begin{aligned}(7 + 4i)(2 - 5i) &= 7(2 - 5i) + 4i(2 - 5i)\\ &= 14 - 35i + 8i - 20i^2\\ &= 14 - 27i - 20(-1)\\ &= 14 - 27i + 20\\ &= 34 - 27i\end{aligned}$$

División de números complejos

Cuando aparece un número complejo en el denominador de una expresión algebraica de la forma $a + bi$, para eliminarlo se sigue el mismo método que se aplica cuando se racionaliza el denominador de una expresión algebraica con radicales.

Si tenemos el número complejo $a + bi$, entonces su conjugado es $a - bi$; de esta manera su producto es

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - (bi)^2\\ &= a^2 - b^2i^2\\ &= a^2 - b^2(-1)\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

El producto anterior, $a^2 + b^2$, es un número real. Por consiguiente, para eliminar el número complejo del denominador, por ejemplo, en la expresión $\frac{4}{2+5i}$ se procede como se explica a continuación.

Multiplica el numerador y el denominador de la expresión por su conjugado, en este caso $2 - 5i$; es decir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{2+5i}\right)\left(\frac{2-5i}{2-5i}\right) &= \frac{8-20i}{(2)^2-(5i)^2} = \frac{8-20i}{4-25i^2} = \frac{8-20i}{4-25(-1)}\\ &= \frac{8-20i}{4+25}\\ &= \frac{8-20i}{29}\\ &= \frac{8}{29} - \frac{20i}{29}\end{aligned}$$

En el ejemplo siguiente se detalla este procedimiento.

Ejemplo 8 Efectúa la división siguiente entre números complejos

$$\frac{7}{4-3i}$$

Solución

$$\left(\frac{7}{4-3i}\right)\left(\frac{4+3i}{4+3i}\right)=\frac{7\left(4+3i\right)}{16-9i^2}$$
$$=\frac{28+21i}{16+9}$$
$$=\frac{28+21i}{25}=\frac{28}{25}+\frac{21i}{25}$$

Potencias de *i*

Si necesitamos encontrar potencias de la unidad imaginaria i tenemos lo siguiente

- $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -1$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$
- $i^8 = (i^4)2 = (1)2 = 1$

Cuando se quiere elevar la unidad imaginaria a una potencia n, donde n es un número natural mayor que 4, la potencia se expresa como el producto de dos potencias de i. En este producto, uno de estos factores tiene un exponente múltiplo de 4 y el otro debe ser menor que dicho número; esto significa que podemos utilizar el método que se explica a continuación.

Unidad imaginaria elevada a una potencia n, con n > 4

Primero se divide el exponente de la potencia entre 4 y el residuo será el exponente de la potencia a la que hay que elevar i para obtener el resultado, por lo que deducimos lo siguiente.

1. Si el residuo de $\frac{n}{4}$ es cero, entonces $i^n = 1$. Por ejemplo, evaluemos i^{560}

$$\begin{array}{r|l} & 140 \\ \hline 4 & 560 \\ & 16 \\ & 00 \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces $i^{560} = 1$.

2. Si el residuo de $\frac{n}{4}$ es 1, entonces $i^n = i$. Por ejemplo, evaluemos i^{125}

$$\begin{array}{r|l} & 31 \\ \hline 4 & 125 \\ & 05 \\ & 1 \end{array}$$

Como el residuo es 1, entonces $i^{125} = i$.

3. Si el residuo de $\frac{n}{4}$ es 2, entonces $i^n = -1$. Por ejemplo, evaluemos i^{142}

$$\begin{array}{r} 35 \\ 4\overline{)142} \\ 22 \\ 2 \end{array}$$

Como el residuo es 2, entonces $i^{142} = -1$.

4. Si el residuo de $\frac{n}{4}$ es 3, entonces $i^n = -i$. Por ejemplo, evaluemos i^{239}

$$\begin{array}{r} 59 \\ 4\overline{)239} \\ 39 \\ 3 \end{array}$$

Como el residuo es 3, entonces $i^{239} = -i$.

Ejercicios 6

I. *Evalúa las siguientes potencias de la unidad de los números imaginarios. (Elige la opción correcta.)*

1. i^{15}
a. $-i$
b. i
c. 1
d. -1

a. $-i$

3. i^{153}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

a. i

5. i^{78}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

d. -1

2. i^{40}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

c. 1

4. i^{128}
a. $-i$
b. i
c. 1
d. -1

c. 1

6. i^{81}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

a. i

7. i^{63}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

b. $-i$

8. i^{142}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

b. $-i$

9. i^{543}
a. i
b. $-i$
c. 1
d. -1

b. $-i$

II. *Efectúa las operaciones entre números complejos siguientes.*

10. $(8 + 5i) + (3 - i)$

$11 + 4i$

11. $(7 + 9i) - (4 - 6i)$

$3 + 15i$

12. $(5 - 3i) - (2 - 9i)$

$3 + 6i$

13. $(-6 + 4i) + (2 - i)$

$-4 + 3i$

14. $(3 + 4i)(2 - 5i)$

$26 - 7i$

15. $(9 + 2i)(4 - 3i)$

$42 - 19i$

16. $(4 - 3i)(2 + 5i)$

$23 + 14i$

17. $(9 + 2i)(9 - 2i)$

85

18. $\dfrac{5-4i}{5+4i}$

$$\frac{9-40i}{41}$$

19. $\dfrac{7+2i}{7-2i}$

$$\frac{45+28i}{53}$$

Solución de ecuaciones cuadráticas con raíces complejas

En una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes y $a \neq 0$, si el discriminante $(b^2 - 4ac)$ es menor que cero, la ecuación no tiene solución para el conjunto de los números reales, pero sí la tiene para el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 9

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 14x + 58 = 0$.

Solución

En este caso se observa fácilmente que no existe una pareja de números reales tales que al multiplicarlos su producto sea 58 y cuya suma sea 14. Por tanto, esta ecuación no se puede resolver por factorización, así que resolvámosla por la fórmula general.

Evaluemos primero el discriminante $d = b^2 - 4ac$

$$d = (14)^2 - 4(1)(58)$$
$$d = 196 - 232$$
$$d = -36$$

Ahora apliquemos la fórmula correspondiente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$
$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{-36}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-14 \pm 6i}{2} = \frac{-14}{2} \pm \frac{6i}{2}, \quad \text{luego}$$

$$x = -7 \pm 3i$$

Las soluciones de esta ecuación son las raíces complejas siguientes

$$x = -7 + 3i \quad \text{y} \quad x = -7 - 3i$$

Ejercicios 7

I. *Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes, que implican raíces complejas. (Elige la opción correcta.)*

1. $x^2 - 6x + 25 = 0$

a. $x = 6 \pm 4i$
b. $x = 3 \pm 8i$
c. $x = -3 \pm 4i$
d. $x = 3 \pm 4i$

d. $x = 3 \pm 4i$

2. $x^2 + 6x + 13 = 0$

a. $x = -3 \pm 8i$
b. $x = 3 \pm 2i$
c. $x = -2 \pm 4i$
d. $x = -3 \pm 2i$

d. $x = -3 \pm 2i$

3. $x^2 - 10x + 34 = 0$

a. $x = 10 \pm 6i$
b. $x = -5 \pm 5i$
c. $x = 5 \pm 3i$
d. $x = 5 \pm 6i$

c. $x = 5 \pm 3i$

4. $x^2 + 14x + 53 = 0$

a. $x = -7 \pm 2i$
b. $x = 7 \pm 2i$
c. $x = -7 \pm 4i$
d. $x = -7 \pm 4i$

a. $x = -7 \pm 2i$

5. $x^2 - 10x + 41 = 0$

a. $x = 5 \pm 4i$
b. $x = -5 \pm 4i$
c. $x = 5 \pm 8i$
d. $x = -5 \pm 8i$

a. $x = 5 \pm 4i$

6. $x^2 - 14x + 58 = 0$

a. $x = 7 \pm 6i$
b. $x = 7 \pm 3i$
c. $x = -7 \pm 6i$
d. $x = -7 \pm 3i$

b. $x = 7 \pm 3i$

Ecuaciones cuadráticas como modelos matemáticos

Analicemos a continuación problemas de aplicación donde el modelo matemático es una ecuación cuadrática.

Ejemplo 10

a. El producto de dos enteros pares consecutivos es 360. Calcula el número mayor.

Solución

Si x representa el número menor, entonces $x + 2$ es la expresión que representa al mayor

$$\begin{aligned} x(x + 2) &= 360 \\ x^2 + 2x &= 360 \\ x^2 + 2x - 360 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver por factorización, resulta

$$\begin{aligned} (x + 20)(x - 18) &= 0 \\ x &= -20 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Si $x = 18$, entonces $x + 2 = 20$.

Si $x = -20$, entonces $x + 2 = -20 = -18$.

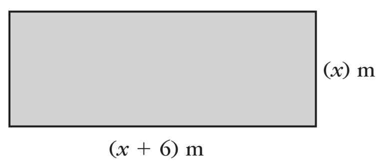
El número mayor es 20

b. El largo de un rectángulo mide 6 metros (m) más que su ancho. Si su área es de 280 m^2, calcula sus dimensiones.

Solución

Si x representa la longitud de su ancho en metros, la expresión de su largo es $x + 6$, de donde

$$\begin{aligned} A &= x(x + 6) \\ x(x + 6) &= 280 \\ x^2 + 6x &= 280 \\ x^2 + 6x - 280 &= 0 \end{aligned}$$



Al resolver por factorización la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} (x + 20)(x - 14) &= 0 \\ x &= -20 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

$x = -20$ se desecha porque la longitud del ancho no puede ser negativa; por tanto, mide 14 m. Así, la longitud del largo es $x + 6$; es decir, 20 metros (m).

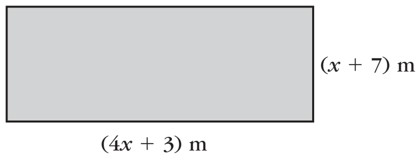
Ejercicios 8

I. *Resuelve los ejercicios de aplicación siguientes.*

1. La posición (h) de una flecha lanzada verticalmente hacia arriba está dada por la ecuación $h = -16t^2 + 160t + 200$, donde h se mide en pies y t en segundos (s). Determina el tiempo que tarda la flecha en llegar al suelo (observa que cuando llega al suelo, la altura $h = 0$).

11.1 segundos

2. El área del rectángulo de la siguiente figura es de 150 m^2. Calcula su perímetro.



$P = 50$ m

3. Calcula la altura de un triángulo si su longitud es de 4 centímetros (cm) menor que el doble de su base y su área es de 63 cm^2.

14 cm

4. El largo de un rectángulo mide 2 metros (m) más que su ancho. Si el área es de 120 m^2, determina la longitud de su largo.

12 m

5. La hipotenusa de un rectángulo mide 17 centímetros (cm) y un cateto mide 7 cm más que el otro. Calcula la longitud de sus catetos.

8 cm y 15 cm

Solución de ecuaciones cuadráticas por el método gráfico

Las raíces reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos que corresponden a $y = 0$ en la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$

Dicho de otro modo, las raíces del conjunto solución son los valores de x en los que la gráfica corta el eje x. La curva que corresponde a la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Si la curva no corta al eje x, las raíces son complejas, es decir, $b^2 - 4ac < 0$.

Ejemplo 11

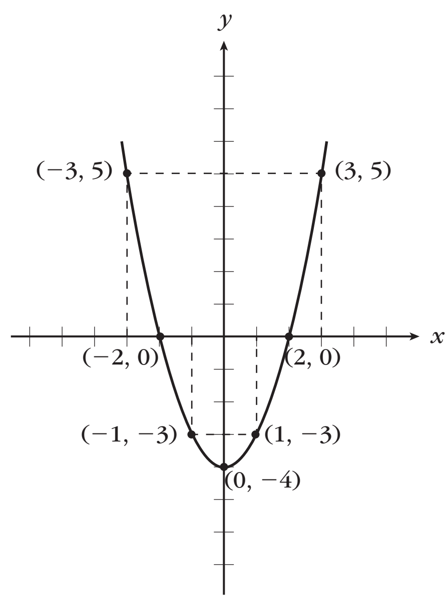
Resuelve por el método gráfico las ecuaciones siguientes.

a. $x^2 - 4 = 0$

Solución

Asignemos a x los valores que se indican en la tabla siguiente y obtengamos los valores que corresponden a y. Luego ubiquemos en el plano cartesiano los puntos obtenidos y dibujemos la curva que los une.

x	$y = x^2 - 4$	$P(x, y)$
-3	$y = (-3)^2 - 4 = 5$	$(-3, 5)$
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$y = (-1)^2 - 4 = -3$	$(-1, -3)$
0	$y = (0)^2 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = (1)^2 - 4 = -3$	$(1, -3)$
2	$y = (2)^2 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$y = (3)^2 - 4 = 5$	$(3, 5)$



Como se observa, la gráfica de $y = x^2 - 4$ es una parábola que se abre hacia arriba, como se muestra en la figura de la derecha.

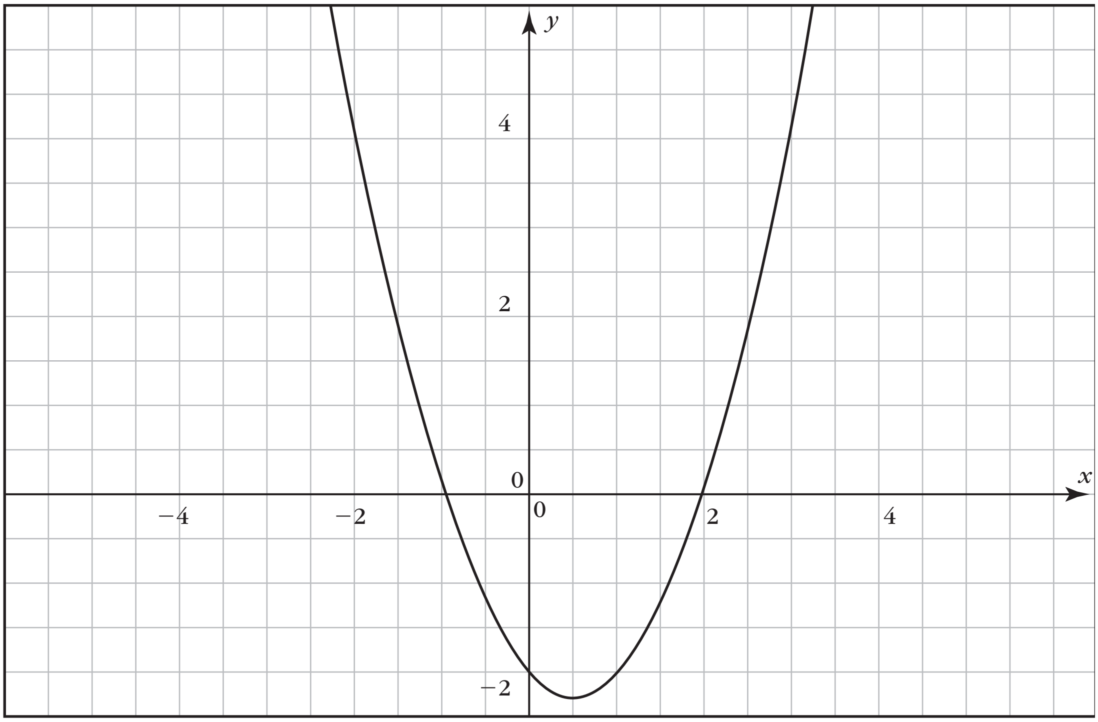
De acuerdo con la gráfica que corresponde a $y = x^2 - 4$, el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es $S = \{-2, 2\}$, es decir: $x_1 = 2$

b. Determina por el método gráfico el conjunto solución de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Solución

De la ecuación se obtienen los pares ordenados siguientes, con la gráfica respectiva

x	-4	-3	-2	-1	0	0.5	1	2	3	4
y	18	10	4	0	-2	-2.25	-2	0	4	10



Al unir los puntos obtenidos mediante una curva resulta la parábola que se ilustra en la figura anterior.

De acuerdo con la gráfica que obtuvimos, la solución de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ es

$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 2$$
$$S = \{-1, 2\}$$

Evaluación

I. *Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Sean sus raíces elementos del conjunto de los números reales. (Elige la opción correcta.)*

1. $x^2 + 12x = 0$

a. $x = 12$
b. $x = -12$
c. $x = 0; x = 12$
d. $x = 0; x = -12$
e. $x = 0$

d. $x = 0; x = -12$

2. $2x^2 - 72 = 0$

a. $x = 6$
b. $x = -6$
c. $x = 6; x = -6$
d. $x = 7; x = -7$

c. $x = 6; x = -6$

3. $8x^2 - 26x + 15 = 0$

a. $x = \frac{-5}{2}$; $x = \frac{3}{4}$

b. $x = \frac{5}{2}$; $x = \frac{3}{4}$

c. $x = \frac{3}{4}$; $x = \frac{-4}{5}$

d. $x = \frac{-2}{5}$; $x = \frac{-4}{3}$

e. $x = \frac{-5}{2}$; $x = \frac{-3}{4}$

b. $x = \frac{5}{2}$; $x = \frac{3}{4}$

4. $-x^2 + 6x + 2 = 0$

a. $x = -0.4$; $x = 7.2$
b. $x = -6.3$; $x = -0.3$
c. $x = 0.3$; $x = -6.3$
d. $x = -0.3$; $x = 6.3$
e. $x = 0.4$; $x = -7.2$

d. $x = -0.3$; $x = 6.3$

II. *Resuelve los siguientes problemas de aplicación donde el modelo matemático es una ecuación cuadrática. (Elige la opción correcta.)*

5. El largo de un rectángulo mide 6 metros (m) más que su ancho. Si su área es de 135 m^2, determina la longitud de su largo.

a. 17 m
b. 15 m
c. 14 m
d. 19 m

b. 15 m

III. *Resuelve lo siguiente. (Elige la opción correcta.)*

6. Determina la suma de las raíces de la ecuación $10x^2 - 9x + 2 = 0$.

a. $\frac{-9}{2}$

b. $\frac{-9}{10}$

c. $\frac{10}{9}$

d. $\frac{9}{10}$

d. $\frac{9}{10}$

IV. *Encuentra el producto de las raíces de la ecuación.*

7. $10x^2 - 9x + 2 = 0$

a. $\frac{-2}{5}$

b. $\frac{9}{2}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{2}{5}$

e. $\frac{-1}{5}$

c. $\frac{1}{5}$

V. *Evalúa las potencias imaginarias siguientes.*

8. La potencia imaginaria i^{60}.

a. 0
b. 1
c. -1
d. i
e. $-i$

b. 1

9. La potencia imaginaria i^{102}.

a. 0
b. 1
c. -1
d. i
e. $-i$

c. -1

VI. *Realiza las siguientes operaciones con números complejos y ecuaciones cuadráticas.*

10. Efectúa la multiplicación entre números complejos $(-3 + 4i)(-2 - 3i)$.

a. $18 + i$
b. $-15i$
c. $-6i$
d. $16 + i$
e. $18i$

a. $18 + i$

11. Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 6x + 13 = 0$. Sean sus raíces elementos de los números complejos.

a. $x = 3 \pm 2i$
b. $x = 4 \pm i$
c. $x = 4 \pm 3i$
d. $x = 2 \pm 3i$
e. $x = -3 \pm 2i$

e. $x = -3 \pm 2i$

15

Desigualdades

- Propiedades de las desigualdades
- Desigualdades absolutas y condicionales
- Solución de desigualdades
- Desigualdades con valor absoluto
- Sistema de desigualdades lineales

Propiedades de las desigualdades

Una de las propiedades fundamentales del conjunto de los números reales es que se pueden ordenar. Con base en ello, la propiedad de tricotomía establece que para cualquier par de números reales a y b se cumple una de las proposiciones siguientes:

1. Que a sea mayor que b
2. Que a sea menor que b
3. Que sea $a = b$

Si la diferencia $a - b$ es un número positivo, entonces a es mayor que b y lo representamos con $a > b$; por ejemplo

- $7 > 4$, ya que $7 - 4 = 3$, que es positivo.
- $2 > -3$, ya que $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ y 5 es positivo.
- $-1 > -5$, ya que $-1 - (-5) = -1 + 5 = 4$.
- $0 > -2$, ya que $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$.

Por el contrario, si la diferencia $a - b$ es un número negativo, entonces a es menor que b, lo que se simboliza con $a < b$; por ejemplo

- $4 < 9$, ya que $4 - 9 = -5$, que es negativo.
- $-6 < -2$, ya que $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$, que es menor que cero.
- $-5 < 5$, ya que $-5 - (5) = -5 - 5 = -10$.
- $-6 < 0$, ya que $-6 - (0) = -6$.*

Por último, si $a - b = 0$, entonces $a = b$.

---

* *Observación:* todo número negativo es menor que cero.

Desigualdad (o inecuación)

Un enunciado que señala que una expresión es mayor que, mayor o igual que, menor que, menor o igual que otra expresión es una *desigualdad (o inecuación)*.

Para representar lo expuesto en el recuadro anterior se utilizan los símbolos indicados son los siguientes en el cuadro 1.

Símbolo	*Significado*
$>$	mayor que
$\geq$	mayor o igual que
$<$	menor que
$\leq$	menor o igual que

Sentido de la desigualdad

La dirección del símbolo de desigualdad se denomina *sentido* de la desigualdad; así, por ejemplo, las expresiones $x > 2$ y $x > 7$ son desigualdades del mismo sentido, mientras que $x > a$ y $b < c$ son desigualdades de sentido contrario.

Propiedades de las desigualdades

Para poder trabajar con desigualdades es importante conocer sus propiedades, que se enumeran a continuación:

Propiedades de las desigualdades

1. El sentido de una desigualdad no cambia si se suma o se resta un mismo número real a sus dos miembros; por ejemplo, si a, b y c son tres números reales, donde $a > b$, entonces

   a. Si $a > b$ ello implica que $a + c > b + c$.

   b. $a > b$, de donde se sigue que $a - c > b - c$.

2. El sentido de una desigualdad no se altera si se multiplica o divide en ambos miembros por un mismo número real positivo; por ejemplo, si a, b y c son tres números reales, donde $a > b$ y c es un número positivo, entonces

$$c > 0$$
$$ac > bc \qquad \text{y}$$
$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

3. Si se multiplica o divide a ambos miembros de una desigualdad por un mismo número real negativo, el sentido de la desigualdad se invierte; por ejemplo, si a, b y c son tres números reales, donde $a > b$ y c es un número negativo ($c < 0$), entonces

$$ac < bc \qquad \text{y}$$
$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

4. Si a, b y c son tres números reales positivos, donde $a > b$, entonces

$$a^c > b^c \qquad \text{pero} \qquad a^{-c} < b^{-c}$$

5. *Propiedad transitiva de la desigualdad*

   a. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

   b. $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.

6. *Propiedad de la no negatividad.*

   Si a es un número real, entonces $a^2 \geq 0$.

7. *Propiedad del recíproco*. Si a es un número real, entonces

   a. Si $a > 0$ se cumple que $\frac{1}{a} > 0$.

   b. $a < 0$, por tanto, $\frac{1}{a} < 0$.

Desigualdades absolutas y condicionales

Una *desigualdad absoluta* es la que tiene el mismo sentido para todos los valores reales de las variables para los que están definidos sus miembros; por ejemplo

$$(x - 5)^2 > -4$$

es una desigualdad de este tipo, ya que el cuadrado de todo número real es un número positivo o es cero, y éste es mayor que -4.

Desigualdad condicional

Una desigualdad condicional es una proposición verdadera sólo para ciertos valores de las variables; por ejemplo, la desigualdad

$$2x - 5 > 0$$

sólo es cierta para aquellos valores de x que son mayores que $\frac{5}{2}$.

Solución de desigualdades

Si se tiene una desigualdad con una variable, entonces todo valor de ésta que hace que la desigualdad sea una proposición verdadera es una *solución* de tal desigualdad y el conjunto que contiene todas sus soluciones es su *conjunto solución*.

Desigualdades equivales

Resolver una desigualdad, también conocida como *inecuación*, significa encontrar su conjunto solución.

Si dos o más desigualdades tienen el mismo conjunto solución entonces son desigualdades equivalentes.

Desigualdades lineales con una variable

Si en una desigualdad aparece una sola variable con exponente 1, entonces esa desigualdad es *lineal*.

Para resolver una desigualdad lineal (también llamada *inecuación lineal*) la escribimos como una sucesión de desigualdades equivalentes cada vez más simples, es decir, en forma análoga a la solución de una ecuación lineal; dicho de otra forma, el objetivo es despejar la variable y obtener la desigualdad equivalente más simple que la original aplicando las propiedades adecuadas.

Ejemplo 1

Resuelve las desigualdades siguientes.

a. $5x - 4 \geq 11$

Solución

$$5x \geq 11 + 4$$
$$5x \geq 15$$
$$x \geq \frac{15}{5}$$
$$x \geq 3$$

b. $6 - 2x < 4$

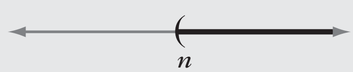
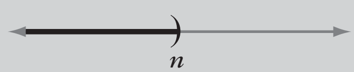
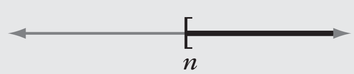
Solución

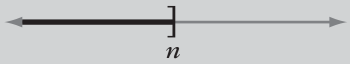
Con el fin de que el término que contiene la variable x tenga signo positivo, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por -1, y obviamente cambiamos el sentido de la desigualdad

$$(6 - 2x)(-1) > 4(-1), \quad \text{de donde}$$
$$-6 + 2x > -4$$
$$2x > -4 + 6$$
$$2x > 2$$
$$x > \frac{2}{2}$$
$$x > 1$$

Representación del conjunto solución de una desigualdad gráficamente y en notación de intervalos

El conjunto solución de una desigualdad también puede representarse en una recta numérica y en forma de notación de intervalos, como se explica en el cuadro 1.

Conjunto solución	Representación gráfica del conjunto solución	Representación en forma de intervalos del conjunto solución
a. $x > n$		(n, ∞)
b. $x < n$		$(-\infty, n)$
c. $x \geq n$		$[n, \infty)$

d. $x \leq n$		$(-\infty, n]$
e. $n < x < m$		(n, m)
f. $n < x \leq m$		$(n, m]$
g. $n \leq x < m$		$[n, m)$
h. $n \leq x \leq m$		$[n, m]$
i. $x > n$ o bien, $x < -n$		$(-\infty, -n) \cup (n, \infty)$
j. $x \geq n$ o $x \leq -n$		$(-\infty, -n] \cup [n, \infty)$

Cuadro 2. Representación gráfica y en forma de intervalos del conjunto solución de una desigualdad.

Cabe precisar que un paréntesis en la recta numérica indica que el valor extremo *no forma parte* de la solución y que el corchete indica que sí es parte de ésta. (*Nota:* al respecto, también se utiliza el criterio siguiente: un pequeño círculo abierto sobre los extremos en lugar de paréntesis y círculo cerrado en lugar de corchete.)

Ejemplo 2

Resuelve las desigualdades lineales siguientes. Representa el conjunto solución tanto en forma gráfica como en forma de intervalos.

a. $6(5 - x) - 2(x - 3) \leq 5(2 - 4x) + 6$

Solución

Primero eliminemos los signos de agrupación y después reduzcamos términos semejantes en ambos miembros de la desigualdad.

$$30 - 6x - 2x + 6 \leq 10 - 20x + 6$$

$$36 - 8x \leq 16 - 20x, \qquad \text{de donde resulta}$$

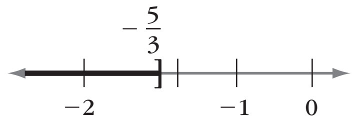
$$-8x + 20x \leq 16 - 36$$

$$12x \leq -20, \qquad \text{luego}$$

$$x \leq -\frac{20}{12}$$

$$x \leq -\frac{5}{3}$$

La representación gráfica del conjunto solución es



A su vez, la representación en forma de intervalos es

$$\left(-\infty,\ -\frac{5}{3}\right]$$

b. $\frac{x}{3} - 5 < \frac{3}{4}x - \frac{21}{2}$

Solución

Primero multiplicamos por el mínimo común denominador (MCD) con el fin de eliminar los coeficientes fraccionarios en ambos miembros de la desigualdad. El MCD es 12.

$$12\left(\frac{x}{3} - 5\right) < 12\left(\frac{3}{4}x - \frac{21}{2}\right) \quad \text{de donde resulta:}$$

$$4x - 60 < 9x - 126, \quad \text{luego}$$
$$4x - 9x < -126 + 60$$
$$-5x < -66$$

Con el fin de eliminar el signo negativo del término que contiene la x, cambiemos *todos* los signos y el *sentido* de la desigualdad

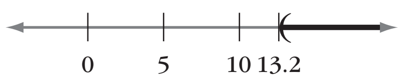
$$5x > 66$$

(Lo anterior resulta al multiplicar por -1 ambos miembros de la desigualdad.) Por tanto

$$x > \frac{66}{5}$$

$$x > 13.2$$

La representación gráfica del conjunto solución es



Por su parte, la representación en forma de intervalos es

$$(13.2, \infty)$$

Ejercicios 1

I. *Halla el conjunto solución de las desigualdades siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $18x + 6 \leq 120 - 20x$

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

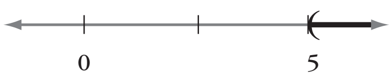
c.

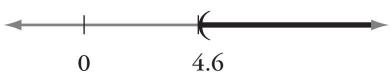
2. $6x - 1 > 29$

a. 

b. 

c. 

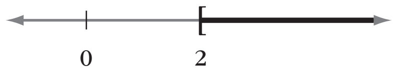
d. 

e. 

d.

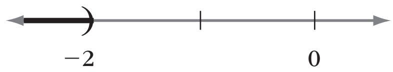
3. $-4 - 3x \leq 2$

a. 

b. 

c. 

d. 

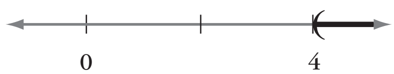
e. 

c.

4. $8 - 2\,(x - 3) < 2 + x$

a. 

b. 

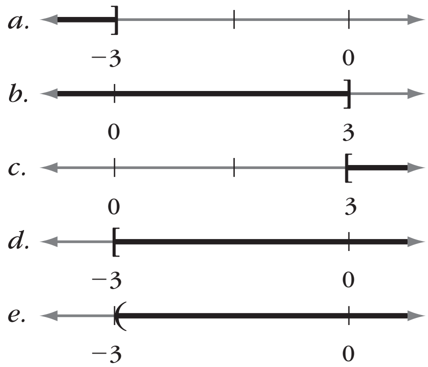
c. 

d. 

e. 

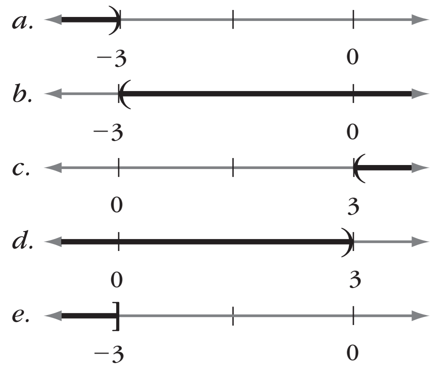
c.

5. $6 - 3x < 15$



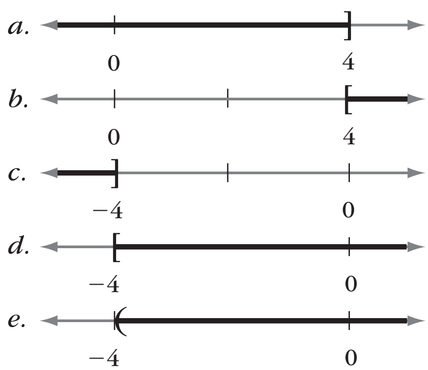
e.

7. $2 - 3x > 11$



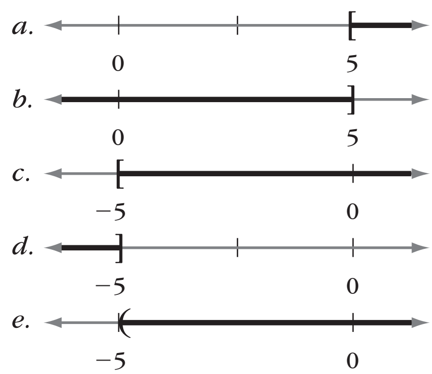
a.

6. $4(x - 7) \leq 6x - 20$



d.

8. $2x - 3 \leq 4x + 7$



c.

Desigualdades con valor absoluto

Recuerda que el valor absoluto de un número a, representado por $|a|$, se define de esta manera

$$\begin{aligned} |a| &= a, && \text{si} \quad a > 0 \\ |a| &= -a, && \text{si} \quad a < 0 \\ |a| &= 0, && \text{si} \quad a = 0 \end{aligned}$$

Si tenemos la desigualdad $|x| > 3$, fácilmente observamos que la expresión es una proposición verdadera si $x > 3$ o $x < -3$, ya que, por ejemplo, si $x = 4$, entonces $|4| > 3$, la cual es una proposición verdadera; asimismo, si $x = -4$, entonces tenemos que $|-4| > 3$, lo cual también es cierto.

En general, si $|a| > b$, donde a es una expresión algebraica y b un número real positivo, entonces su conjunto solución es el que resulta de la unión de los conjuntos solución de las desigualdades $a > b$ o $a < -b$.

Ejemplo 3

Resuelve la desigualdad siguiente con valor absoluto. Representa su conjunto solución en forma gráfica y en forma de intervalo.

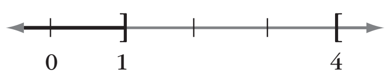
$$|2x - 5| \geq 3$$

Solución

La desigualdad equivale a:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &\geq 3 & \text{o} \qquad 2x - 5 &\leq -3 \\ 2x &\geq 3 + 5 & 2x &\leq -3 + 5 \\ 2x &\geq 8 & 2x &\leq 2 \\ x &\geq 4 & x &\leq \frac{2}{2} \\ & & x &\leq 1 \end{aligned}$$

Luego, la representación del conjunto solución de la desigualdad que nos ocupa es



$$(-\infty, 1] \ \cup \ [4, \infty)$$

que en notación de intervalos equivale a

Si tenemos la desigualdad $|x| < 4$, fácilmente se observa que el conjunto solución es $-4 < x < 4$, es decir, la solución es el conjunto de los números reales que están entre -4 y 4.

En general, si $|a| < b$, donde a es una expresión algebraica y b es un número real positivo, entonces el conjunto solución de dicha igualdad es el que resulta al resolver la desigualdad doble $-b < a < b$.

Ejemplo 4

Resuelve la desigualdad con valor absoluto que sigue. Representa el conjunto solución en forma gráfica y de intervalos

$$|2 - 5x| - 4 \leq 8$$

Solución

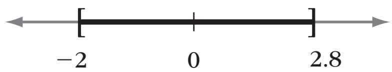
Despejemos primero la expresión $|2 - 5x|$

$$\begin{aligned} |2 - 5x| &\le 8 + 4 \\ |2 - 5x| &\le 12, \qquad \text{luego} \\ -12 \le 2 - 5x &\le 12 \\ -12 - 2 \le -5x &\le 12 - 2 \\ -14 \le -5x &\le 10 \end{aligned}$$

Para eliminar el signo negativo del término que contiene la x cambiemos todos los signos y los sentidos de las desigualdades

$$\begin{aligned} 4 \ge 5x &\ge -10, \qquad \text{o sea} \\ -10 \le 5x &\le 14, \qquad \text{de donde} \\ -\frac{10}{5} \le x &\le \frac{14}{5} \\ -2 \le x &\le 2.8 \end{aligned}$$

Por consiguiente, en forma gráfica el conjunto solución es



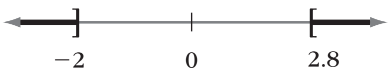
que en notación de intervalos equivale a

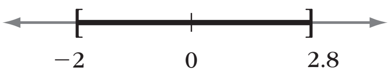
$$[-2, 2.8]$$

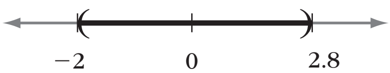
Ejercicios 2

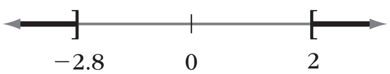
I. *Halla el conjunto solución de las desigualdades siguientes. (Elige la opción correcta.)*

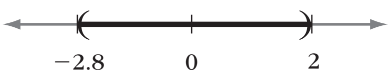
1. $|2 - 5x| \ge 12$

a. 

b. 

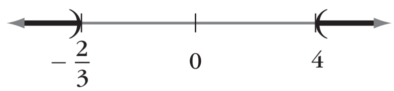
c. 

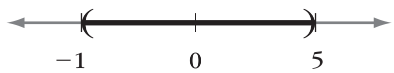
d. 

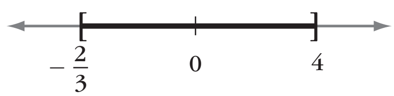
e. 

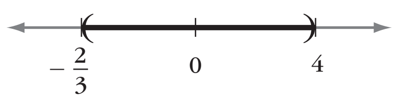
a.

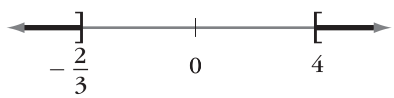
2. $|3x - 5| < 7$

a. 

b. 

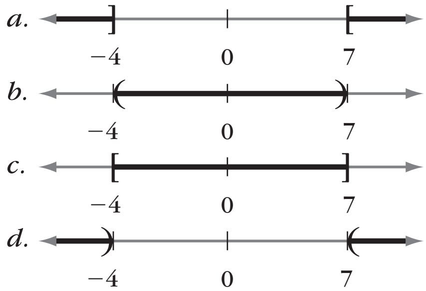
c. 

d. 

e. 

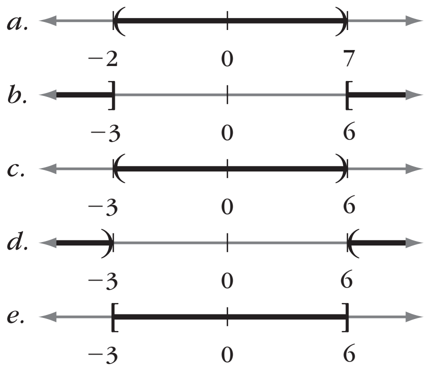
d.

3. $|3 - 2x| > 11$



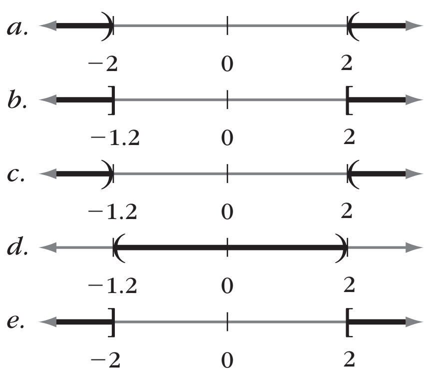
d.

4. $|3 - 2x| \leq 9$



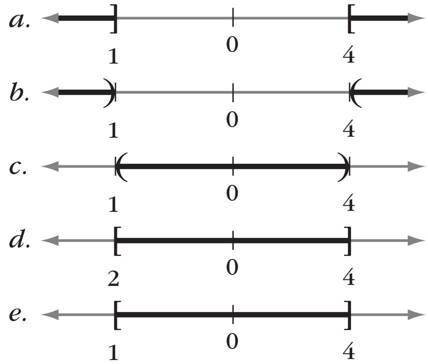
e.

5. $|5x - 2| > 8$



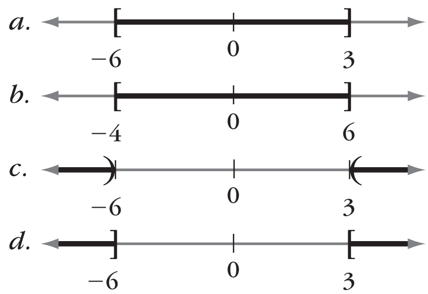
c.

6. $|2x - 5| \leq 3$



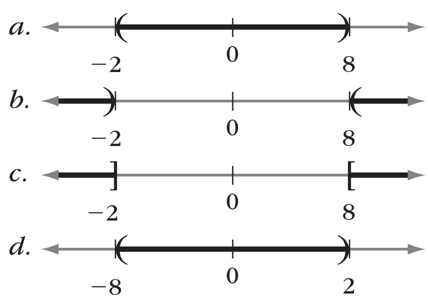
e.

7. $|2x + 3| \leq 9$



a.

8. $|3 - x| > 5$



b.

9. $|9 - 2x| \geq 7$

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

a.

Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad o inecuación con dos variables x y y es una desigualdad que adopta una de estas formas:

- $Ax + By + C < 0$
- $Ax + By + C \leq 0$
- $Ax + By + C > 0$
- $Ax + By + C \geq 0$

La solución de una desigualdad de este tipo es el conjunto infinito de los pares ordenados (x_0, y_0) que la satisfacen cuando x y y son sustituidas por x_0, y_0, respectivamente.

Gráfica de una desiguladad lineal con dos variables

Geométricamente, la ecuación $Ax + By + C = 0$ divide el plano cartesiano o rectangular en dos semiplanos, uno de los cuales es la solución de la desigualdad (o inecuación) $Ax + By + C < 0$ o bien, de $Ax + By + C > 0$. Si una desigualdad es de la forma $Ax + By + C > 0$ o $Ax + By + C < 0$, entonces son desigualdades *estrictas* porque su conjunto solución no incluye los pares ordenados (x_0, y_0) que están en la gráfica de $Ax + By + C = 0$. Entonces, para determinar su conjunto solución se procede de esta manera.

Trazo de la gráfica de una desigualdad lineal con dos variables

1. Se dibuja la gráfica de $Ax + By + C = 0$ como una línea punteada, ya que los puntos de su solución no lo son de la desigualdad.
2. La solución es una de las regiones del semiplano que satisfacen la desigualdad de que se trata, y para determinarla se elige un par ordenado $P(x_0, y_0)$ de prueba (cualquier par que no esté en la recta). Si ese punto satisface la inecuación, entonces la región donde se localiza es la solución; si no la satisface, la otra región es la solución.
3. Se sombrea el semiplano que representa el conjunto solución.

Ejemplo 5

a. Determina el conjunto solución de la desigualdad $y \geq 2x - 6$.

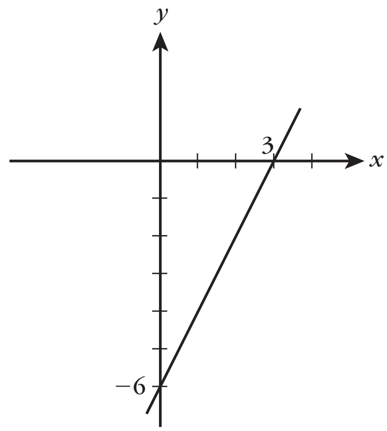
Solución

Tracemos primero la recta que corresponde a la ecuación $y = 2x - 6$.

Una recta queda determinada si se conocen dos de sus puntos. Hallemos los que corresponden a sus intersecciones con los ejes coordenados.

Si $x = 0$, entonces

$$y = 2x - 6$$
$$y = 2(0) - 6$$
$$y = -6 \quad \text{luego, tenemos el punto}$$
$$(0, -6)$$



Si $y = 0$, entonces

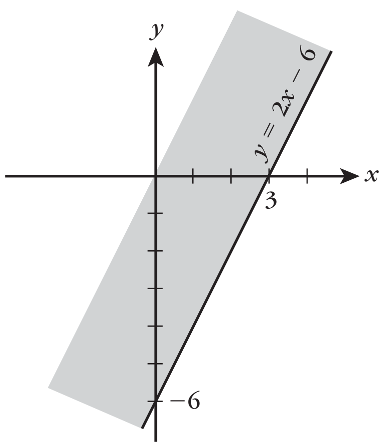
$$0 = 2x - 6$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x = 3, \quad \text{luego, tenemos el punto}$$
$$(3, 0)$$

Con los puntos $(0, -6)$ y $(3, 0)$ tracemos la gráfica de $y = 2x - 6$.

Para la región del semiplano que corresponde a la solución, comprobemos si un punto (x_0, y_0) cualquiera que no está en la recta satisface la inecuación. Por ejemplo, verifiquemos para el punto $(0, 0)$.

$$y \geq 2x - 6$$
$$0 \geq 2(0) - 6$$
$$0 \geq 0 - 6$$
$$0 \geq -6$$

Como la desigualdad se verifica, entonces la región que se encuentra sobre la recta es la solución de $y \geq 2x - 6$ y se representa gráficamente como sigue



b. Determina el conjunto solución de la desigualdad $3x - 2y > 12$.

Solución

Primero traza la gráfica de la ecuación $3x - 2y = 12$ como una línea punteada, ya que los puntos $P(x_0, y_0)$ que están en dicha recta no son solución de la inecuación.

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 3(0) - 2y &= 12; \\ -2y &= 12 \\ 2y &= -12 \\ y &= -\frac{12}{2} \\ y &= -6 \end{aligned}$$

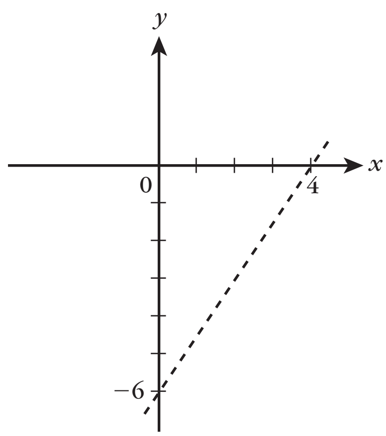
El punto $(0, -6)$ pertenece a la recta $3x - 2y = 12$.

Si $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 3x - 2(0) &= 12 \\ 3x &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

El punto $(4, 0)$ también está en $3x - 2y = 12$.

Con los puntos $(0, -6)$ y $(4, 0)$ tracemos la recta en forma punteada.



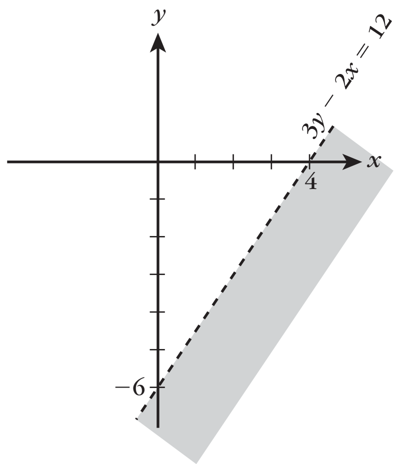
Precisemos nuevamente: con esto indicamos que los puntos $P(x, y)$ que pertenecen a la recta $3x - 2y = 12$ no son elementos del conjunto solución de $3x - 2y > 12$.

Seleccionemos el $P(0, 0)$como punto de prueba para comprobar si se cumple la desigualdad $3x - 2y > 12$.

$$3(0) - 2(0) > 12$$

$$0 > 12 \quad \textbf{Proposición falsa}$$

Como la desigualdad no se verifica, entonces el conjunto solución corresponde a la región del semiplano donde no se encuentra el punto $P(0, 0)$; o sea, la solución es la región del semiplano que se encuentra por debajo de la recta, como se muestra en la siguiente figura



Sistema de desigualdades lineales

El conjunto solución de un sistema de desigualdades es la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones que forman ese sistema.

Ejemplo 6

Determina el conjunto solución del sistema de desigualdades siguiente

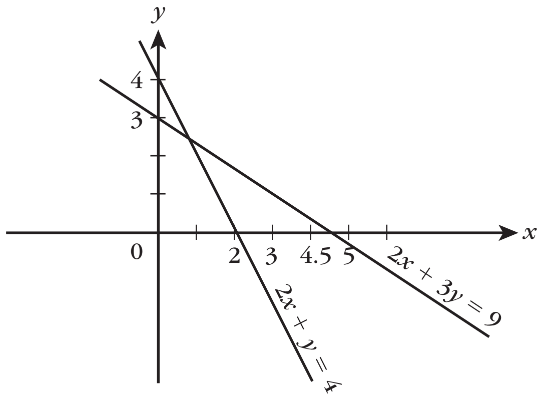
$$2x + 3y \leq 9$$
$$2x + y \geq 4$$

Solución

Tracemos primero en un mismo sistema de coordenadas las rectas de las ecuaciones $2x + 3y = 9$ y $2x + y = 4$.

$2x + 3y = 9$	$2x + y = 4$
Si $x = 0$, entonces queda $3y = 9$ $y = 3$	Si $x = 0$, entonces queda $y = 4$ $y = 4$
$P(0, 3)$	$P(0, 4)$
Si $y = 0$, entonces queda $2x = 9$ $x = 4.5$	Si $y = 0$, queda $2x = 4$ $x = \frac{4}{2}$ $x = 2$
$P(4.5, 0)$	$P(2, 0)$

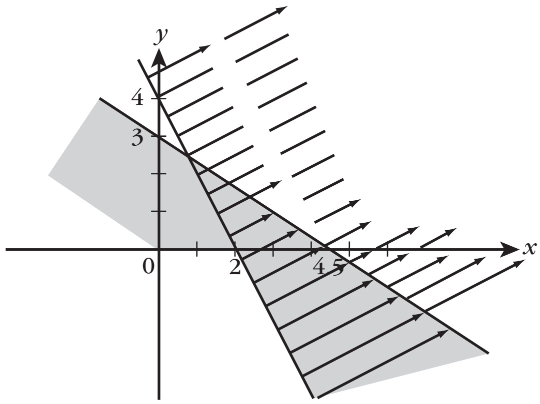
En la figura de la página siguiente se representan las gráficas respectivas



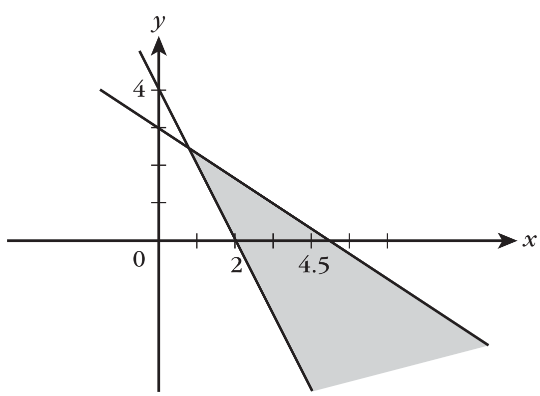
La región del semiplano que corresponde al conjunto solución de $2x + 3y \leq 9$ se encuentra bajo la recta $2x + 3y = 9$, incluidos los puntos que le corresponden; esto se puede verificar seleccionando como prueba el punto $P(0, 0)$, ya que $2(0) + 3(0) \leq 9$. En la figura siguiente el área sombreada representa esta región.

Asimismo, la región del semiplano que se halla sobre la recta $2x + y = 4$, incluidos los puntos que están en ésta, es la solución de la desigualdad $2x + y \geq 4$, como se puede comprobar al observar que el punto $P(0, 0)$ no la satisface, por lo que su solución es la región donde no está dicho punto.

En la figura de abajo la región indicada con flechas punteadas corresponde a la solución de $2x + y \geq 4$.



La solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de ambas inecuaciones y la identificamos en la figura anterior al observar la superficie donde aparecen flechas y está sombreada; o sea, la solución es la región que se indica en la figura siguiente

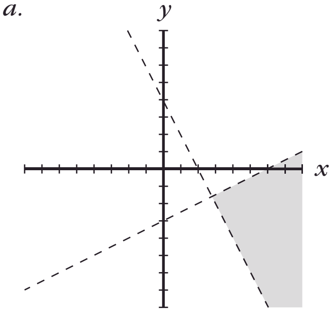


Ejercicios 3

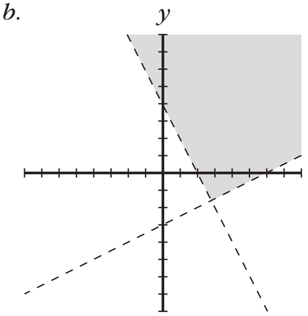
I. *Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas de desigualdades lineales y escribe el inciso correspondiente en el paréntesis.*

1. ( ) $x - 2y \leq 6$
$2x + y \geq 4$

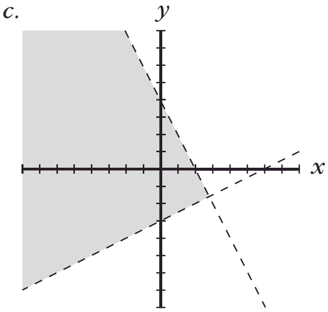
a.



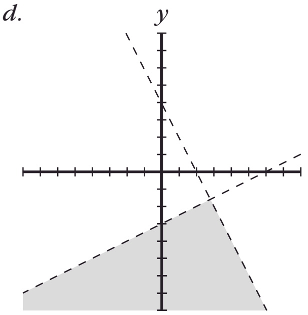
b.



c.

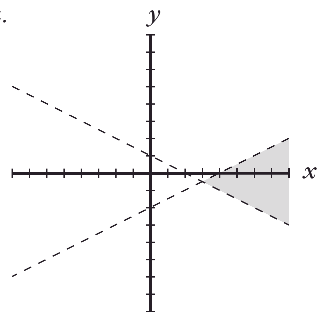


d.

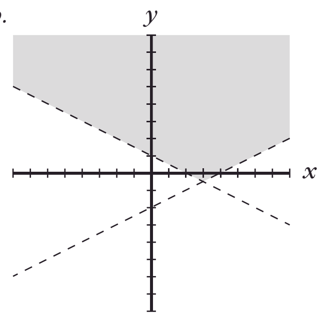


2. ( ) $x + 2y \leq 2$
$x - 2y \geq 4$

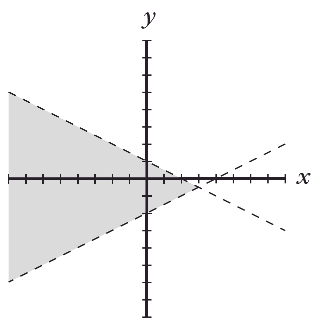
a.



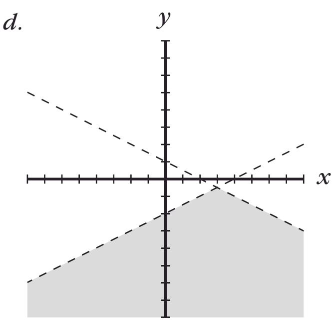
b.



c.

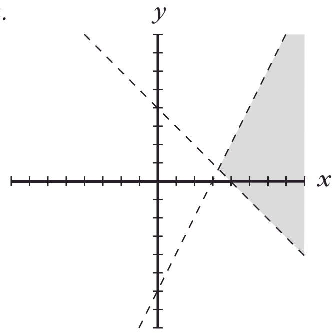


d.

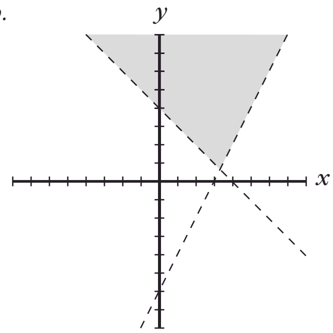


3. ( ) $x + y > 4$
$2x - y < 6$

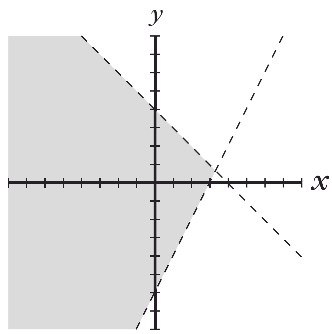
a.



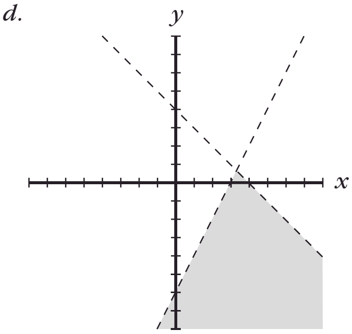
b.



c.

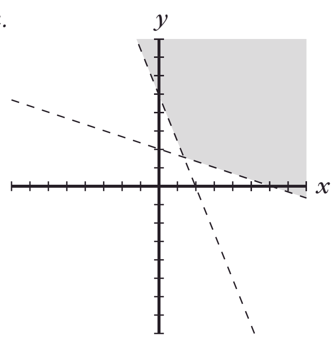


d.

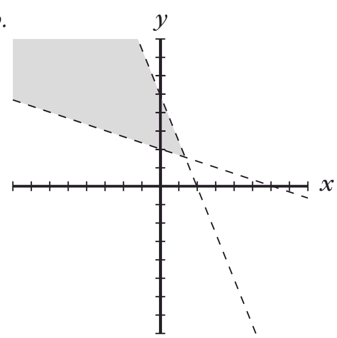


4. ( ) $x + 3y \leq 6$
$2x + y > 4$

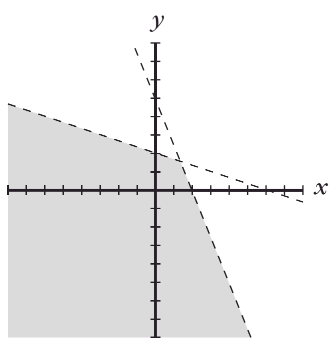
a.



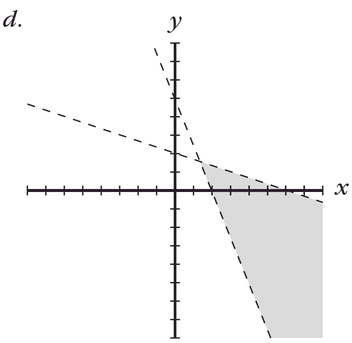
b.



c.



d.



Evaluación

I. *Determina el conjunto solución de las desigualdades siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $3(3x + 4) > 2(2x - 9)$

a. 

b. 

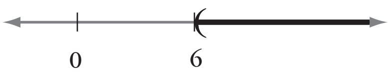
c. 

d. 

e. 

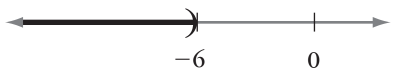
a.

2. $8 - 3x < -10$

a. 

b. 

c. 

d. 

a.

3. $|5 + x| \geq -1$

a. 

b. 

c. 

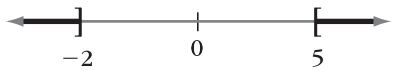
d. $\varnothing$

e. 

e.

4. $|30 - 5x| \geq 20$

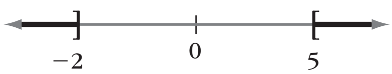
a. $[2, 10]$
b. $(-\infty, 2] \cup [10, \infty]$
c. $\varnothing$
d. $[2, 8]$



b.

5. $|2x - 3| \geq 7$

a. 

b. 

c. 

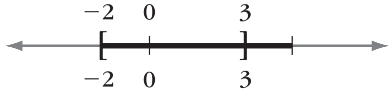
d. 

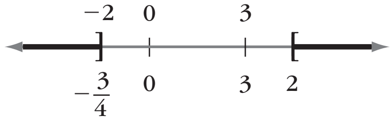
e. 

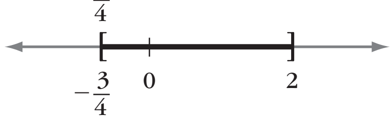
b.

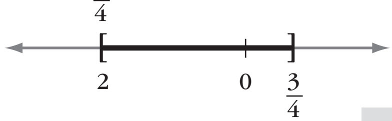
6. $|8x - 5| \leq 11$

a. 

b. 

c. 

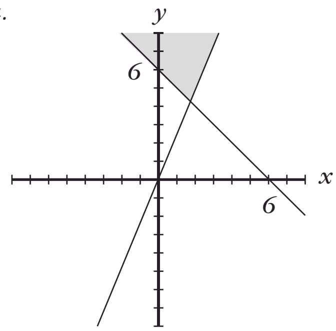
d. 

e. 

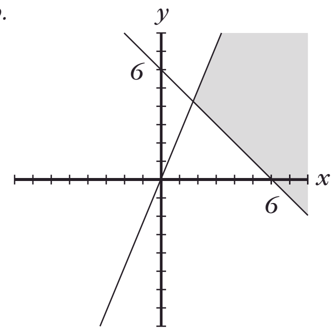
7. Determina cuál de las gráficas corresponde al conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 6 \\ 2x - y &\geq 0 \end{aligned}$$

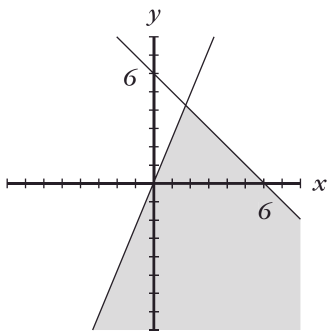
a.



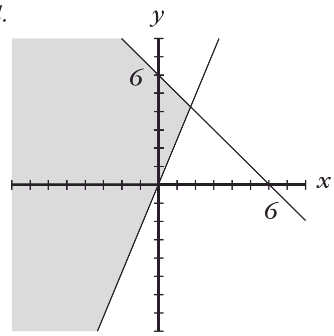
b.



c.

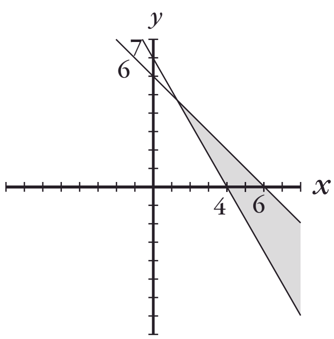


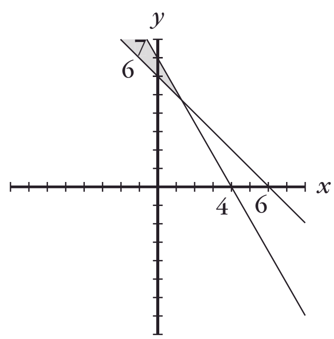
d.

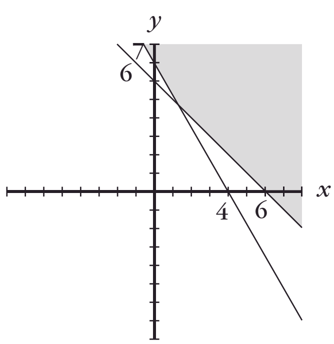


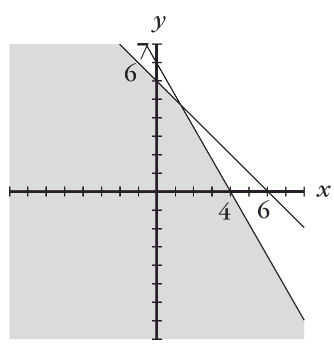
8. Determina el conjunto solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &\geq 6 \\ 7x + 4y &\leq 28 \end{aligned}$$









16

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones no lineales es todo aquel donde al menos una de las ecuaciones que lo constituyen no es de primer grado. Los siguientes son algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales

- $x^2 + y^2 = 25$
  $x^2 - y^2 = 11$
- $9x^2 - 4y^2 = 36$
  $y = x - 2$

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones que lo forman.

Hay dos tipos de métodos para resolver un sistema de ecuaciones no lineales:

- El gráfico
- El algebraico

El método gráfico tiene la característica de que es laborioso y puede ser impreciso; por ello nos limitaremos a resolver este tipo de sistemas de ecuaciones por métodos algebraicos, utilizando los métodos de sustitución, suma y resta e igualación que aprendimos al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunos ejemplos nos ayudarán a demostrarlo.

Ejemplo 1

Resuelve este sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 - y^2 = 7$$

Solución

Si sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema resulta

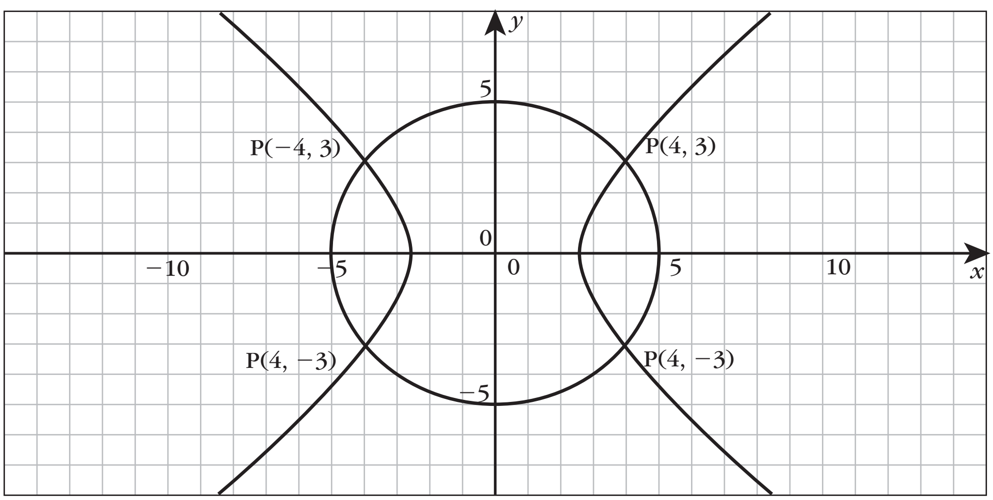
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 32, && \text{luego} \\ x^2 &= 16, && \text{de donde} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{16} \\ |x| &= 4, && \text{luego} \end{aligned}$$
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -4$$

Para obtener los valores de la variable y, se sustituye $x = 4$ y $x = -4$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema, de este modo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ \text{Si} \qquad x &= 4 \\ (4)^2 + y^2 &= 25 \\ 16 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 25 - 16 \\ y^2 &= 9, && \text{luego} \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{9} \\ |y| &= 3, && \text{luego} \end{aligned}$$
$$y = 3 \quad \text{o} \quad y = -3$$
$$\begin{aligned} \text{Si} \qquad x &= -4 \\ (-4)^2 + y^2 &= 25 \\ 16 + y^2 &= 25, && \text{por tanto} \\ y^2 &= 25 - 16, && \text{luego} \\ y^2 &= 9 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{9} && \text{de donde resulta} \\ |y| &= 3, && \text{luego} \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, el conjunto solución del sistema de que se trata es el conjunto de los pares ordenados siguiente, cuya gráfica se muestra en la figura de abajo

$$\{(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)\}$$



La figura anterior representa la gráfica de las ecuaciones y los puntos donde se intersecan, los cuales son el conjunto solución del sistema.

Ejemplo 2

Resuelve el sistema de ecuaciones que sigue:

$$\begin{aligned} y - x^2 + 4x &= 7 \\ 4x - y &= 8 \end{aligned}$$

Solución

Al despejar la variable y de la ecuación $4x - y = 8$ resulta

$$\begin{aligned} 4x - y &= 8 \\ -y &= 8 - 4x, \quad \text{de donde} \\ y &= -8 + 4x \end{aligned}$$

Al sustituir $-8 + 4x$ por y en la ecuación $y - x^2 + 4x = 7$ resulta

$$\begin{aligned} (-8 + 4x) - x^2 + 4x &= 7; \quad \text{de donde} \\ -8 + 4x - x^2 + 4x - 7 &= 0 \\ -x^2 + 8x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

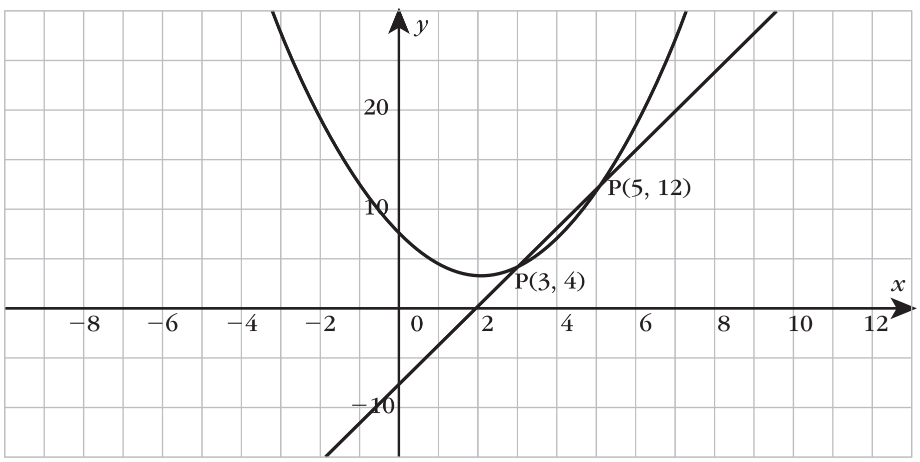
Multipliquemos por -1 ambos miembros de la ecuación anterior para que el coeficiente de x^2 tenga signo positivo

$$\begin{aligned} (-x^2 + 8x - 15)(-1) &= 0(-1) \\ x^2 - 8x + 15 &= 0; \quad \text{de donde} \\ (x - 5)(x - 3) &= 0 \\ x - 5 = 0; x - 3 &= 0 \\ x = 5 \quad \text{o} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Obtengamos los valores correspondientes a la incógnita y para $x = 5$ y para $x = 3$

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 5 \\ 4x - y &= 8 \\ 4(5) - y &= 8 \\ 20 - y &= 8 \\ -y &= 8 - 20 \\ -y &= -12; \quad \text{luego} \\ y &= 12 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} \text{Si } x &= 3 \\ 4x - y &= 8 \\ 4(3) - y &= 8 \\ 12 - y &= 8 \\ -y &= 8 - 12 \\ -y &= -4; \quad \text{luego} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema son los pares ordenados {(5, 12), (3, 4)}; la gráfica respectiva se muestra en la figura siguiente.



Ejercicios 1

I. *Determina el conjunto solución de los sistemas siguientes de ecuaciones no lineales.*

1. $x^2 + y^2 = 9$
$x + y = -3$

$(-3, 0), (0, -3)$

2. $y = x^2 - x - 7$
$y = 2x + 3$

$(5, 13), (-2, -1)$

3. $5x^2 + y^2 = 30$
$9x^2 + y^2 = -16$

$(1, 5), (1, -5), (-1, 5), (-1, -5)$

4. $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 12 = 0$
$x + y = 0$

$(-6, 6), (-1, 1)$

5. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 3x^2 - 2y^2 &= -5 \end{aligned}$$

(3, 4), (3, −4)
(−3, 4),(−3, −4)

6. $$\begin{aligned} y^2 + 4x - 8 &= 0 \\ x + 2.5y &= 6 \end{aligned}$$

(−14, 8), (1, 2)

7. $$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

$P(1, 1)$

8. $$\begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 1 \\ 4x - y &= 5 \end{aligned}$$

(1, −1), (6, 19)

9. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ 3x^2 - y^2 &= 20 \end{aligned}$$

$\left(3,\ \sqrt{7}\right),\ \left(3,\ -\sqrt{7}\right)$
$\left(-3,\ \sqrt{7}\right),\ \left(-3,\ -\sqrt{7}\right)$

10. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 36 \\ 4x^2 - 9y^2 &= 144 \end{aligned}$$

$(-6, 0), (6, 0)$

11. $$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= 16 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$(4, 4)(-4, -4)$

12. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

$(-4, 3)(5, 0)$

Evaluación

I. *Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones. Relaciona correctamente las columnas.*

1. ( ) $y = x^2 - 6x + 5$

$y = 3x - 9$

2. ( ) $x^2 + y^2 = 10$

$x - y = 4$

3. ( ) $x^2 + 4y^2 = 25$

$x + 2y = 1$

4. ( ) $x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + 4y = 25$

5. ( ) $3x^2 - y^2 = 9$

$x^2 + 2y^2 = 10$

6. ( ) $4x^2 + y^2 = 100$

$4x + y^2 = 20$

7. ( ) $x^2 - y^2 = 7$

$x^2 + y^2 = 25$

8. ( ) $x^2 + 5y^2 = 30$

$y = x$

9. ( ) $y^2 - 4y - x = 0$

$x = -2y$

a. $(4, 3), (4, -3)$

$(-4, 3), (-4, -3)$

b. $(5, 0), (-5, 0)$

$(4, 3), (4, -3)$

c. $\left(\sqrt{5}, \sqrt{6}\right), \left(-\sqrt{5}, 6\right)$

d. $(0, 0), (-4, 2)$

e. $(2, 0), (7, 15)$

f. $\left(\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

g. $(1, -3), (3, -1)$

h. $(2, -3), (7, 12)$

i. $(5, 0), (-4, 6), (-4, -6)$

j. $(4, -1.5), (-3, 2)$

k. $\left(2, \sqrt{3}\right), \left(2, -\sqrt{3}\right)$

$\left(-2, \sqrt{3}\right), \left(-2, -\sqrt{3}\right)$

l. $(5, 0), (-5, 0), (3, 4), (-3, 4)$

m. $(3, 4)$

$(-3, 4)$

17

Logaritmos

- Logaritmos
- Ecuaciones logarítmicas
- Evaluación de logaritmos
- Evaluación de logaritmos de base diferente de 10
- Las ecuaciones exponenciales como modelo matemático

El logaritmo de un número positivo M con base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, es el exponente x al que hay que elevar esa base (b) para obtener el número M. Es decir,

$$b^x = M \qquad \text{equivale a} \qquad x = \log_b M$$

En la expresión $\log_b M$, el número representado por M debe ser mayor que cero y recibe el nombre de *argumento*.

Ejemplo 1

a. $\log_3 x = 2$ equivale a la expresión $3^2 = x$

b. $\log_{10} 1000 = 3$ equivale a la expresión $10^3 = 1000$.

Cabe precisar que el logaritmo de 1 en cualquier base es cero y el de la misma base es 1, por ejemplo

c. $\log_2 2 = 1$, porque $2^1 = 2$

d. $\log_{10} 10 = 1$, porque $10^1 = 10$

e. $\log_{10} 1 = 0$, porque $10^0 = 1$

Hay dos sistemas de logaritmos que generalmente se usan en matemáticas. Uno cuya base es el número irracional denotado por la letra e y cuyo valor aproximado es 2.718. Los logaritmos de esta base se denominan *naturales* o *neperianos* en memoria de John Napier (matemático escocés; 1550-1617), su creador, y tienen muchas aplicaciones en matemáticas superiores.

El otro sistema tiene como base de los logaritmos el número 10 y se les llama *logaritmos comunes* o *de Briggs*. En este texto solamente usaremos estos logaritmos de base 10.

Cuando no se escribe la base de una expresión logarítmica se entiende que ésta es igual a 10. Por ejemplo,

$$\log 46 = \log_{10} 46.$$

Característica y mantisa de un logaritmo

El logaritmo común de un número positivo N, simbolizado por $\log N$ en lugar de $\log_{10} N$, consta de dos partes: un entero, que puede ser positivo, negativo o cero, llamado *característica*, y una fracción decimal, que recibe el nombre de *mantisa*.

La característica del logaritmo común de un número mayor que 1 es el número que resulta al restar 1 del número de cifras que están a la izquierda del punto decimal. Por ejemplo,

- La característica de $\log 2347.8$ es 3 (ya que $4 - 1 = 3$).
- La característica de $\log 3.48$ es 0 (pues $1 - 1 = 0$).
- La característica de $\log 465.97$ es 2 (ya que $3 - 1 = 2$).

La característica del logaritmo común de un número menor que 1 es negativa y es el número que resulta al restar de 9 el número de ceros que siguen a la derecha del punto decimal, y a continuación restar el número 10.

Por ejemplo, las características del logaritmo de los números 0.84, 0.00079, 0.00674 son -1, -4, -3, respectivamente.

Otra forma de determinar la característica del logaritmo de un número consiste en expresarlo en notación científica y el exponente de la base 10 es la característica; por ejemplo, la característica del logaritmo de 0.0000724 es -5, ya que $0.0000724 = 7.24 \times 10^{-5}$; asimismo, la de 28 es 1, ya que $28 = 2.8 \times 10^1$.

Cálculo de logaritmo común de un número con calculadora

Hay tablas con las que puede calcularse el logaritmo común de cualquier número real o mayor que cero; sin embargo, las calculadoras facilitan enormemente ese cálculo. Por ello es recomendable usarlas en vez de las tablas.

Los logaritmos comunes de números reales mayores que cero pueden determinarse mediante una calculadora que contenga la tecla $\boxed{\log}$. El procedimiento consiste en oprimir primero las teclas que representan dicho número y después pulsar la tecla $\boxed{\text{log}}$ con lo que de inmediato aparece el logaritmo de ese número en la pantalla. Es importante precisar que hay calculadoras en las que se oprime primero la tecla $\boxed{\text{log}}$.

Ejemplo 2

Determina log 963 con una calculadora.

Solución

Paso 1: oprime las teclas $\boxed{9}\boxed{6}\boxed{3}$.

Paso 2: oprime la tecla $\boxed{\text{log}}$.

La respuesta es 2.9836, lo cual debe aparecer en la pantalla de la calculadora.

Antilogaritmos

El antilogaritmo de un número es el correspondiente a un logaritmo dado, es decir, si $\log x = y$, entonces x es el antilogaritmo de y. Por ejemplo, si $\log 1000 = 3$, entonces el antilogaritmo de 3 es 1000 (ya que $10^3 = 1000$).

En seguida se indica cómo determinar el *antilogaritmo* con una calculadora.

Procedimiento para obtener un antilogaritmo con calculadora

1. Oprime las teclas que representan los dígitos del logaritmo cuyo antilogaritmo queremos encontrar.
2. Oprime las teclas de segunda función $\boxed{2^{\text{nd}}}$, la tecla inverso, $\boxed{\text{inv}}$, o la tecla $\boxed{\text{shift}}$, según el tipo de calculadora que utilices.
3. Oprime la tecla $\boxed{\text{log}}$ y a continuación aparecerá en la pantalla el antilogaritmo.

Ejemplo 3

a. Encuentra el antilogaritmo de 3.539 con una calculadora.

Solución

Paso 1: oprime las teclas que corresponden a 3.539.

Paso 2: oprime las teclas $\boxed{2^{\text{nd}}}$, $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{shift}}$, según la calculadora.

Paso 3: oprime la tecla $\boxed{\text{log}}$.

El resultado obtenido es 3459.39, que como recordarás significa que $10^{3.539} = 3459.39$.

b. Encuentra el antilogaritmo de 2.8.

Solución

Paso 1: oprime las teclas que corresponden a 2.8.

Paso 2: pulsa las teclas $\boxed{2^{\text{nd}}}$, $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{shift}}$, según la calculadora.

Paso 3: oprime la tecla $\boxed{\text{log}}$.

El resultado es 630.96, es decir, $10^{2.8} = 630.96$.

Propiedades de los logaritmos

Como las expresiones $b^x = M$ y $x = \log_b M$ (donde $b > 0$ y $b \neq 1$) significan lo mismo, a cada propiedad o ley de los exponentes le corresponde una propiedad de los logaritmos. A continuación se presentan tales propiedades.

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto de dos números positivos x y y es igual a la suma de los logaritmos de ambos, es decir,

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

Esta propiedad es la correspondiente a la ley de los exponentes: $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$. Asimismo, esta propiedad de los logaritmos puede extenderse en el caso del producto de tres o más números positivos. Por ejemplo,

$$\log_3 7xy = \log_3 7 + \log_3 x + \log_3 y$$

2. El logaritmo de un cociente de dos números positivos x y y es la diferencia de los logaritmos de ambos, esto es:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Esta propiedad es la correspondiente a la ley de los exponentes $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$. Por ejemplo,

$$\log\left(\frac{x}{6}\right) = \log x - \log 6$$

3. El logaritmo de la n-ésima potencia de un número positivo x es igual a n veces el logaritmo de x, es decir,

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

Esta propiedad es la correspondiente a la ley de los exponentes $(b^x)^n = b^{xn}$.

Ejemplo 4

a. $\log x^3 = 3 \log x$.

b. $\log \sqrt{x}$. En este caso $\log \sqrt{x} = \log x^{1/2} = \frac{1}{2} \log x$.

c. $\log_b b = 1$

d. $\log_b 1 = 0$

A veces es necesario utilizar estas propiedades para desarrollar expresiones logarítmicas o para escribir una expresión de este tipo como un logaritmo único.

Ejemplo 5

Escribe en forma desarrollada las expresiones logarítmicas siguientes, aplicando las propiedades adecuadas.

a. $\log \frac{xy}{z}$

Solución

De acuerdo con las propiedades de los logaritmos

$$\log \frac{xy}{z} = \log xy - \log z \qquad \text{luego}$$

$$= \log x + \log y - \log z$$

$$\log \frac{xy}{z} = \log x + \log y - \log z$$

b. $\log x^3y^2$

Solución

De acuerdo con las propiedades de los logaritmos

$$\log x^3y^2 = \log x^3 + \log y^2$$

$$= 3\log x + 2\log y$$

$$\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$$

c. $\log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos tenemos

$$\log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}} = \log \sqrt{x} - \log \sqrt[3]{y}$$

$$= \log x^{1/2} - \log y^{1/3}$$

$$= \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y$$

$$\log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}} = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y$$

A continuación veamos algunos ejemplos en los que dada la expresión logarítmica en forma desarrollada hay que rescribirla como un logaritmo único.

Ejemplo 6

Escribe estas expresiones logarítmicas como un logaritmo único.

a. $\log_3 x + \log_3 y - \log_3 z$

Solución

$$\log_3 x + \log_3 y - \log_3 z = \log_3 \frac{xy}{z}$$

b. $2\log x + 3\log y - \frac{1}{2}\log z$

Solución

$$2\log x + 3\log y - \frac{1}{2}\log z = \log x^2 + \log y^3 - \log \sqrt{z}$$

$$2\log x + 3\log y - \frac{1}{2}\log z = \log \frac{x^2y^3}{\sqrt{z}}$$

c. $\log 7 + \log 4 - \log 2$

Solución

$$\log\frac{7(4)}{2} = \log\frac{28}{2} = \log 14$$

Ejercicios 1

I. *Escribe las expresiones siguientes como un logaritmo único.*

1. $\log x + \log y =$

6. $3\log 5 - \log x =$

2. $\log a + \log b - \log w =$

7. $4\log x + 2\log y - 3\log w =$

3. $2\log x + 3\log y =$

8. $\log 8 - \log x - \log y =$

4. $5\log x + 2\log y - \log w =$

9. $2\log x - \log y - \log z =$

5. $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log y =$

10. $\log 4 + \log x - \log 5 - \log y =$

II. *Escribe en forma desarrollada las expresiones logarítmicas siguientes.*

1. $\log(5xy) =$

4. $\log\left(\dfrac{x^5}{xy^2}\right) =$

2. $\log\left(\dfrac{6x}{y}\right) =$

5. $\log\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} =$

3. $\log(x^2y^4) =$

Ecuaciones logarítmicas

La solución de ecuaciones logarítmicas se basa en la aplicación de las propiedades de potenciación y de logaritmación. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 7

Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes.

a. $\log_2 x = 4$

Solución

De acuerdo con la definición del concepto logarítmico, el número positivo x es el resultado de elevar la base 2 a la cuarta potencia, es decir,

$$x = 2^4, \qquad \text{luego}$$
$$x = 16$$

b. $\log_3 x = 2.5$

Solución

$$x = 3^{2.5}$$

Para elevar $3^{2.5}$ por logaritmos, el método conveniente es encontrar el logaritmo con base 10 de $3^{2.5}$ y después su antilogaritmo, que es el resultado de la operación $3^{2.5}$. Así

$$\log x = 3^{2.5}, \qquad \text{luego}$$
$$\log x = 2.5 \log 3$$
$$\log x = 2.5(0.47712)$$
$$\log x = 1.1928, \qquad \text{luego}$$

$$x = 10^{1.1928}, \qquad \text{o sea}$$
$$x = \text{antilog } 1.1928$$
$$x = 15.588$$

Nota: indaga cómo evaluar $3^{2.5}$ con calculadora.

c. $\log_3 x + \log_3 6 = 2$

Solución

Para resolver esta ecuación logarítmica primero debemos escribir el miembro izquierdo como un logaritmo único con un solo argumento.

$$\log_3 x + \log_3 6 = 2$$
$$\log_3 x(6) = 2$$
$$\log_3 6x = 2$$

De donde resulta

$$6x = 3^2$$
$$6x = 9$$
$$x = \frac{9}{6}, \qquad \text{luego}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

d. $\log_4 48 - \log_4 x = 2$

Solución

Al escribir el miembro izquierdo como un logaritmo único con un solo argumento resulta

$$\log_4\left(\frac{48}{x}\right) = 2, \qquad \text{de donde}$$
$$\frac{48}{x} = 4^2, \qquad \text{luego}$$
$$x\left(\frac{48}{x}\right) = x(4)^2, \qquad \text{de donde resulta}$$
$$48 = 16x, \qquad \text{de donde}$$
$$x = \frac{48}{16}$$
$$x = 3$$

e. $\log(x^2 + 1) - \log(x - 2) = 1$

Solución

Al escribir el miembro izquierdo como un logaritmo único con un solo argumento resulta

$$\log\left(\frac{(x^2+1)}{x-2}\right) = 1, \qquad \text{de donde}$$
$$\frac{x^2+1}{x-2} = 10^1$$
$$x^2 + 1 = 10(x - 2)$$
$$x^2 + 1 = 10x - 20$$
$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

de donde al factorizar el miembro izquierdo de la ecuación anterior resulta

$$(x-7)(x-3)=0$$
$$x-7=0; \qquad x-3=0$$
$$x=7; \qquad x=3$$

Como $\frac{x^2+1}{x-2}$ es mayor que cero para $x=3$ y para $x=7$, entonces son las soluciones de la ecuación dada.

Ejercicios 2

I. *Resuelve estas ecuaciones logarítmicas. (Elige la opción correcta.)*

1. $\log_5 x = 3$

a. $x = 15$
b. $x = 243$
c. $x = 125$
d. $x = 8$

c. $x = 125$

2. $\log_2 x = 5$

a. $x = 32$
b. $x = 10$
c. $x = 25$
d. $x = 7$

a. $x = 32$

3. $\log_3 x = 4$

a. $x = 64$
b. $x = 81$
c. $x = 12$
d. $x = 7$

b. $x = 81$

4. $\log_9 x = \frac{1}{2}$

a. $x = 4.5$
b. $x = -3$
c. $x = 9.5$
d. $x = 3$

d. $x = 3$

5. $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

a. $x = 5$
b. $x = 25.5$
c. $x = 12.5$
d. $x = -5$

a. $x = 5$

6. $\log_4 x = 5.6$

a. $x = 2846.2$
b. $x = 2104.8$
c. $x = 2352.5$
d. $x = 2484.2$

c. $x = 2352.5$

7. $\log_5 x = 1.4$

a. $x = 9.52$
b. $x = 8.71$
c. $x = 10.41$
d. $x = 8.54$

a. $x = 9.52$

8. $\log_6 x = 2.5$

a. $x = 94.24$
b. $x = 80.30$
c. $x = 78.58$
d. $x = 88.18$

d. $x = 88.18$

9. $\log_6 (7x+1) = 2$

a. $x = 4$
b. $x = 5$
c. $x = 3$
d. $x = 6$

b. $x = 5$

10. $\log_2 (5x-3) = 5$

a. $x = 6$
b. $x = 5$
c. $x = 7$
d. $x = 5.8$

c. $x = 7$

11. $\log_3 (5x) = 4$

a. $x = 18.5$
b. $x = 16.2$
c. $x = 9.6$
d. $x = 15.3$

b. $x = 16.2$

12. $\log_4 (10x) = 3$

a. $x = 5$
b. $x = 7.2$
c. $x = 5.6$
d. $x = 6.4$

d. $x = 6.4$

13. $\log x + \log 5 = 2$
a. $x = 20$
b. $x = 4$
c. $x = 95$
d. $x = 25$

a. $x = 20$

17. $\log_7 (x + 1) + \log_7 (x - 5) = 1$
a. $x = -6$
b. $x = 2$
c. $x = -2$
d. $x = 6$
e. $x = -2, x = 6$

d. $x = 6$

20. $\log_x 125 = 3$
a. $x = 4$
b. $x = 5$
c. $x = 6$
d. $x = 3$

b. $x = 5$

14. $\log (8x) - \log 4 = 2$
a. $x = 7.5$
b. $x = 25$
c. $x = 50$
d. $x = 40$

c. $x = 50$

18. $\log (2x) - \log (x - 2) = 1$
a. $x = 3.5$
b. $x = 1.5$
c. $x = 2.75$
d. $x = 2.5$

d. $x = 2.5$

21. $\log_x 5 = 1.2$
a. $x = 3.82$
b. $x = 4.2$
c. $x = 2.9$
d. $x = 3.1$

a. $x = 3.82$

15. $\log_2 (x + 2) + \log_2 (x - 5) = 3$
a. $x = 6$
b. $x = -6$
c. $x = 3$
d. $x = -3$
e. $x = -3, x = 6$

c. $x = 3$

19. $\log_4 x - \log_4 8 = 0.5$
a. $x = 0.25$
b. $x = 8$
c. $x = 16$
d. $x = 32$

c. $x = 16$

22. $\log_x 9 = 2.1$
a. $x = 3.856$
b. $x = 2.145$
c. $x = 2.847$
d. $x = 3.192$

c. $x = 2.847$

16. $\log x + \log (x - 3) = 1$
a. $x = 2$
b. $x = 5$
c. $x = 5, x = -2$
d. $x = -5, x = 2$
e. $x = -2$
f. $x = -5$

b. $x = 5$

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece al menos en un exponente.

Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan las propiedades de los logaritmos y las de la potenciación, como se detalla en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 8

Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes.

a. $2^x = 8$

Solución

Una forma de resolver esta ecuación es la siguiente.

Observa que 8 es igual a 2^3; por tanto, $2^x = 2^3$; entonces tenemos esta propiedad.

Si $b^x = b^y$, con $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces $x = y$; por ende, la solución de la ecuación referida es $x = 3$.

Esta ecuación también puede resolverse aplicando esta propiedad: si $a = b$, donde a y b son dos números reales mayores que cero, entonces $\log a = \log b$, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad 2^x &= 8, && \text{entonces} \\ \log 2^x &= \log 8, && \text{de donde} \\ x\log 2 &= \log 8 \end{aligned}$$

al despejar la x resulta

$$x = \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$x = \frac{0.90309}{0.30103}, \quad \text{luego}$$

$$x = 3$$

b. $15^{2x} = 140$

Solución

Al aplicar la propiedad, si $a = b$, con a y b mayores que 0, entonces $\log a = \log b$, tenemos

$$\begin{aligned} \log 15^{2x} &= \log 140 \\ 2x\log 15 &= \log 140 \\ 2x &= \frac{\log 140}{\log 15} \\ 2x &= 1.8248, && \text{de donde} \\ x &= 0.9124 \end{aligned}$$

c. $5^{4x-1} = 15\,625$

Solución

$$\begin{aligned} \log 5^{4x-1} &= \log 15\,625 \\ (4x - 1)\log 5 &= \log 15\,625 \\ 4x - 1 &= \frac{\log 15625}{\log 5} \\ 4x - 1 &= 6 \end{aligned}$$

Despejemos a continuación la x:

$$\begin{aligned} 4x &= 6 + 1 \\ 4x &= 7 \\ x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

e. $47(2.7)^x = 3\,856$

Solución

Para facilitar la solución de esta ecuación primero despejamos la expresión 2.7^x. Como 47 multiplica a dicha expresión, entonces pasa dividiendo al miembro derecho de la ecuación

$$2.7^x = \frac{3856}{47}$$

$2.7^x = 82.0425$, de donde al resolver la ecuación por logaritmos resulta

$$x \log 2.7 = \log 82.0425$$

al despejar x queda

$$x = \frac{\log 82.0425}{\log 2.7}$$

$$x = 4.4372$$

Ejercicios 3

I. *Resuelve estas ecuaciones exponenciales. (Elige la opción correcta.)*

1. $3^x = 729$

a. $x = 5$
b. $x = 4$
c. $x = 6.5$
d. $x = 6$

d. $x = 6$

2. $6^x = 7776$

a. $x = 5.5$
b. $x = 5$
c. $x = 4.5$
d. $x = 5.25$

b. $x = 5$

3. $42^x = 88.7$

a. $x = 1.5$
b. $x = 1.7$
c. $x = 1.2$
d. $x = 1.6$

c. $x = 1.2$

4. $46(27)^x = 414$

a. $x = 0.\overline{6}$
b. $x = 0.58$
c. $x = 0.72$
d. $x = 0.45$

5. $80(5.4)^x = 7\,800$

a. $x = 2.1$
b. $x = 1.9$
c. $x = 2.95$
d. $x = 2.716$

d. $x = 2.716$

6. $7^{x-2} = 1\,540$

a. $x = 4.6$
b. $x = 5.77$
c. $x = 6.4$
d. $x = 3.8$

b. $x = 5.77$

7. $6000(2.67)^{0.03x} = 12\,000$

a. $x = 23.52$
b. $x = 18.4$
c. $x = 25.6$
d. $x = 20.8$

a. $x = 23.52$

8. $26(12)^x = 16\,480$

a. $x = 1.86$
b. $x = 2.24$
c. $x = 2.596$
d. $x = 3.21$

c. $x = 2.596$

9. $10\,000e^{0.07t} = 20\,000$ (*Nota:* $e = 2.7183$)

a. $t = 9.9$
b. $t = 8.4$
c. $t = 10.5$
d. $t = 9.2$

a. $t = 9.9$

10. $1000e^{0.06t} = 3\,000$ (*Nota:* $e = 2.7183$)

a. $t = 15.6$
b. $t = 20.4$
c. $t = 18.3$
d. $t = 19.5$

c. $t = 18.3$

11. $30e^{-0.00004x} = 24$ (*Nota:* $e = 2.7183$)

a. $x = 6281.2$
b. $x = 5578.5$
c. $x = 5140.3$
d. $x = 5908.4$

b. $x = 5578.5$

12. $25\,000e^{0.045x} = 35\,000$ (*Nota:* $e = 2.7183$)

a. $x = 7.48$
b. $x = 9.2$
c. $x = 6.52$
d. $x = 8.2$

b. $x = 9.2$

13. $1000(0.5)^{t/28} = 20$

a. $t = 165.4$
b. $t = 150.2$
c. $t = 158$
d. $t = 170.9$

c. $t = 158$

14. $12\,000(2)^{0.5x} = 60\,000$

a. $x = 5.2$
b. $x = 3.8$
c. $x = 6.1$
d. $x = 4.64$

d. $x = 4.64$

15. $800e^{-0.000124t} = 560$ (*Nota:* $e = 2.7183$)

a. $t = 3408.3$
b. $t = 2450.2$
c. $t = 2978.8$
d. $t = 2876.4$

d. $t = 2876.4$

16. $5^{2x+1} = 8$

a. $x = 0.25$
b. $x = 0.146$
c. $x = 0.38$
d. $x = 1.2$

b. $x = 0.146$

Evaluación de logaritmos de base diferente de 10

Si queremos hallar $\log_3 15$ podemos representar dicho valor por la literal x y entonces resulta la ecuación logarítmica

$$\log_3 15 = x, \qquad \text{de donde}$$
$$3^x = 15$$

Al resolver la ecuación exponencial anterior tenemos

$$\log 3^x = \log 15$$
$$x \log 3 = \log 15, \qquad \text{de donde}$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x = 2.465$$

En general, dada la expresión $\log_b a = x$, entonces

$$b^x = a, \qquad \text{de donde}$$

$$x \log b = \log a$$

$$x = \frac{\log a}{\log b}$$

Es decir, el logaritmo de un número mayor que cero de base b diferente de 10 es igual al cociente del logaritmo de dicho número y el logaritmo de la base de ambos con base 10, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 9

a. $\log_7 47 = \dfrac{\log 47}{\log 7} = 1.978$

b. $\log_2 8 = \dfrac{\log 8}{\log 2} = 3$

Ejercicios 4

I. *Halla el valor de los logaritmos siguientes. (Elige la opción correcta.)*

1. $\log_4 20$

a. 1.85
b. 2.16
c. 3.40
d. 2.93

b. 2.16

4. $\log_{12} 124$

a. 2.40
b. 1.25
c. 2.87
d. 1.934

d. 1.934

7. $\log_2 48$

a. 4.732
b. 6.10
c. 5.585
d. 5.924

c. 5.585

2. $\log_5 36$

a. 1.82
b. 2.954
c. 3.17
d. 2.226

d. 2.226

5. $\log_3 8$

a. 1.20
b. 2.45
c. 1.893
d. 1.62

c. 1.893

8. $\log_7 235$

a. 3.72
b. 2.10
c. 3.46
d. 2.8056

d. 2.8056

3. $\log_5 50$

a. 2.43
b. 3.54
c. 1.84
d. 2.94

a. 2.43

6. $\log_4 760$

a. 4.785
b. 5.41
c. 3.96
d. 4.211

a. 4.785

9. $\log_8 326$

a. 2.783
b. 1.965
c. 3.14
d. 2.14

a. 2.783

10. $\log_2 1.5$

a. 0.585 *b.* 0.64 *c.* 0.492 *d.* 0.510

a. 0.585

Las ecuaciones exponenciales como modelo matemático

En medicina, biología, química, física y economía existen muchos problemas de crecimiento y decaimiento cuyo modelo matemático es una ecuación exponencial.

Cuando un proceso de crecimiento se caracteriza por un incremento porcentual continuo o constante de valor se denomina *proceso de crecimiento exponencial*. Por el contrario, cuando un proceso de decaimiento se caracteriza por una disminución porcentual constante de valor se conoce como *proceso de decaimiento exponencial*.

Por ejemplo, si la población de cierto país crece constantemente a una tasa de 3%, el proceso de crecimiento se puede describir mediante una función exponencial. Si la frecuencia del contagio de cierta enfermedad decrece constantemente el número de habitantes a una tasa de 5%, el proceso de decaimiento también se puede describir por una función exponencial.

Veamos a continuación algunas aplicaciones de la función exponencial.

Interés compuesto

El rédito que se paga por el uso del dinero se llama *interés*. La cantidad de dinero que el banco presta a una persona o empresa se conoce como *capital*.

El interés se calcula como un porcentaje llamado *tasa de interés* de un capital en cierto periodo, que puede ser anual, semestral, trimestral, semanal o diario.

Si se presta un capital P a una tasa de interés anual r, al final del periodo el saldo (S) del prestamista se calcula mediante esta fórmula:

$$S = P + Pr, \quad \text{de donde resulta}$$
$$S = P(1 + r)$$

Observa que el saldo es la suma del interés generado y el capital invertido.

Cuando el saldo obtenido al término del periodo se vuelve a prestar (capitalizar) a la misma tasa de interés, entonces el interés es *compuesto*, esto es, es el interés que se paga sobre un interés anterior.

Por ejemplo, si un capital P se presta a una tasa de interés anual r compuesta anualmente, entonces

- El saldo al final del primer año será:

  $S = P + Pr$, luego
  $S = P(1 + r)$

- Al final del segundo año será:

  $S = P(1 + r) + P(1 + r)\,r$, luego
  $S = P(1 + r)(1 + r)$
  $S = P(1 + r)^2$

- Al final del tercer año será:

  $S = P(1 + r)^2 + P(1 + r)^2 r$, de donde resulta
  $S = P(1 + r)^3$

- Al final de t años será:
  $S(t) = P(1 + r)^t$

En los ejemplos que siguen se muestran algunos de estos casos.

Ejemplo 10

Se desea invertir un capital de $10 000 a una tasa de interés anual de 6%. Calcula el saldo después de 10 años si el interés se compone anualmente.

Solución

Si el interés se compone anualmente tenemos que

$$S = P(1 + r)^t \qquad \text{(si se compone anualmente } k = 1\text{)}$$
$$S = 10\,000(1 + 0.06)^{10}$$
$$S = 10\,000\,(1.06)^{10}$$
$$S = 17\,908.47$$

Ejercicios 5

I. *Responde a las preguntas 1 y 2 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

Inviertes $800 000 en una cuenta que paga una tasa de interés compuesto de 8% anual.

1. ¿Cuál será tu saldo dentro de cinco años?

a. $1 175 462.4
b. $1 064 860.2
c. $1 250 400
d. $1 150 280.5

a. $1 175 462.4

2. Si piensas retirar tu dinero cuando tu saldo sea de $1 600 000, ¿a qué plazo debes invertir ese dinero?

a. Ocho años
b. 9.5 años
c. 10 años
d. Nueve años

d. Nueve años

II. *Responde a los ejercicios 3 y 4 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

Blanca invierte $600 000 en una cuenta que paga una tasa de interés compuesto de 9% anual.

3. ¿Cuál será su saldo dentro de cuatro años?

a. $825 400
b. $850 205
c. $902 600
d. $846 949

d. $846 949

4. ¿A qué plazo tiene que invertir su dinero para que su capital se duplique?

a. Ocho años
b. Siete años
c. Nueve años
d. 10 años

a. Ocho años

III. *Responde a los ejercicios 5 y 6 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

Un cultivo contiene 4000 bacterias. Después de t horas de proliferación, el número de bacterias (n) presentes en el cultivo está determinado por la expresión $n = 4000(2)^t$. Contesta las preguntas 5 y 6.

5. Determina el número de bacterias presentes en el cultivo después de 2.5 horas de proliferación.

a. 24 800
b. 23 500
c. 21 500
d. 22 627

d. 22 627

6. ¿Después de cuantas horas (h) de proliferación habrá 362 000 bacterias?

a. 7.5 h
b. 6.5 h
c. 5.5 h
d. 8 h

b. 6.5 h

IV. *Responde a los ejercicios 7 y 8 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

La población de cierta ciudad es de 400 000 habitantes. Se estima que el número de habitantes (P) después de t años se determina con la expresión $P = 400\,000(1.02)^t$.

7. Determina la población estimada dentro de 20 años.

a. 605 400 habitantes
b. 608 000 habitantes
c. 594 379 habitantes
d. 390 100 habitantes

c. 594 379 habitantes

8. ¿Dentro de cuantos años se estima que el número de habitantes será el doble que la actual?

a. 38 años
b. 40 años
c. 35 años
d. 30 años

c. 35 años

V. *Responde a los ejercicios 9 y 10 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

El valor comercial de un automóvil nuevo es de $140 000. Después de t años de uso, su valor (v) está determinado por la expresión $v = 140\,000(0.88)^t$.

9. Determina el valor del auto cuando tenga 12 años de uso.

a. $30 194
b. $28 400
c. $32 000
d. $27 600

a. $30 194

10. ¿A los cuántos años de uso el valor del auto será de $50 394?

a. Nueve años
b. Siete años
c. 10 años
d. Ocho años

d. Ocho años

VI. *Responde a los ejercicios 11 y 12 con base en el planteamiento siguiente. (Elige la opción correcta.)*

Una sustancia contiene 500 gramos de material radiactivo. Después de t años, la cantidad de material radiactivo (Q) presente en la sustancia está determinado por la expresión $Q = 500(0.95)^t$.

11. Determina la cantidad en gramos (g) de material radiactivo presente en la sustancia dentro de 35 años.

a. 83.0 g
b. 80 g
c. 88 g
d. 90 g

d. 83.0

12. ¿Dentro de cuántos años la cantidad de material radiactivo presente en la sustancia se reduce a la mitad?

a. 13.5 años
b. 14.5 años
c. 12 años
d. 13 años

d. 13.5 años

Evaluación

I. *Escribe en el paréntesis la respuesta correcta de expresar como un logaritmo único la siguiente expresion logarítmica. (Elige la opción correcta.)*

1. ( ) $4\log x + 3\log y - 2\log z$

a. $\log(-24xyz)$
b. $\log(-x^4y^3z^2)$
c. $\log x^4y^3z^2$
d. $\log\dfrac{x^4y^3}{z^2}$
e. $\log\dfrac{z^2}{x^4y^3}$

d. $\log\dfrac{x^4y^3}{z^2}$

II. *Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes.*

2. ( ) $\log_2 x = 7.4$

a. $x = 54.76$
b. $x = 168.897$
c. $x = 204.96$
d. $x = 148.9$
e. $x = 59.67$

b. $x = 168.897$

3. ( ) $\log_2\left(\sqrt{x-6}\right) = 3$

a. $x = 72$
b. $x = 70$
c. $x = 12$
d. $x = 42$
e. $x = 58$

b. $x = 70$

---

4. ( ) $\log_2 5 + \log_2 (2x + 3) = 5$

a. $x = 1.7$
b. $x = 2.1$
c. $x = 1.4$
d. $x = 1.95$
e. $x = 2.8$

a. $x = 1.7$

III. *Resuelve la siguiente ecuación exponencial. (Elige la opción correta.)*

5. ( ) $46(3)^x = 12\,480$

a. $x = 7$
b. $x = 5.1$
c. $x = 5.6$
d. $x = 4.6$
e. $x = 3.9$

b. $x = 5.1$

IV. *Encuentra el valor del siguiente logaritmo.*

6. ( ) $\log_3 17$

a. 2.5786
b. 0.904
c. 1.7074
d. 0.7536
e. 4.913

a. 2.5786

V. *Aplicación*

La magnitud de un terremoto en la escala de Richter (R) se calcula con la ecuación $R = \log i$, donde i representa cuántas veces es más intenso un terremoto que otro cuya actividad telúrica es la menor magnitud que puede registrarse en un sismógrafo.

7. ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto de magnitud 7.2 en la escala de Richter respecto a otro de magnitud 3.5 de la misma escala?

a. 370 veces
b. 4800 veces
c. 6 400 veces
d. 5400 veces
e. 5012 veces

e. 5012 veces

---

8. Con el fin de calcular el área de la superficie de una persona se utiliza la fórmula empírica: $\log A = -2.144 + 0.425 \log m + 0.725 \log h$, donde A representa el área en metros cuadrados (m^2), m el peso en kilogramos (kg) y h la altura en centímetros (cm). Calcula el área de la superficie de una persona que pesa 70 kg y que mide 160 cm de altura.

a. 1.73 m^2
b. 2.1 m^2
c. 1.81 m^2
d. 1.92 m^2
e. 2.2 m^2

El número de bacterias presente en un cultivo después de x horas de proliferación está dado por la ecuación $y = 4000(2)^x$. Determina lo siguiente.

9. El número de bacterias que habrá en el cultivo después de 2.6 horas de proliferación.

a. 24 251
b. 32 000
c. 24 850
d. 29 400
e. 18 453

a. 24 251

---

10. El número de bacterias presentes en un cultivo después de x horas de proliferación esta determinado por la ecuación $y = 400(2)^2$. ¿Después de cuántas horas (h) habrá 362 000 bacterias?

a. 5.7 h
b. 4 h
c. 6.5 h
d. 7.6 h
e. 9.8 h

e. 9.8 h

Luis invierte $500 000 en una cuenta a un interés compuesto anual de 6%. Contesta las preguntas 11 y 12.

11. ¿Cuál será su saldo dentro de siete años?

a. $844 739.5
b. $895 423.85
c. $890 500.6
d. $751 815.1

d. $751 815.1

---

12. ¿A qué plazo debe invertir el dinero para que su saldo sea de $796 925?

a. Once años
b. Nueve años
c. Ocho años
d. Diez años

c. Ocho años

18

Variaciones de proporcionalidad

- Variación directamente proporcional
- Variación directa con la *n*-ésima potencia
- Variación inversamente proporcional

En este capítulo estudiaremos ciertos tipos de relaciones que se caracterizan porque las variables que intervienen en ellas siguen una ley determinada que puede expresarse mediante un enunciado o con una ecuación. Estas relaciones reciben el nombre de *variaciones de proporcionalidad* o simplemente *variaciones*.

Variación directamente proporcional

Una variable y es *directamente proporcional* a la variable x si la razón o cociente entre ambas variables es constante; es decir, $\frac{y}{x} = 4$ $\left(\text{ya que } \frac{12}{3},\ \frac{16}{4},\ \frac{20}{5}, \text{ etc.}\right)$, donde k recibe el nombre de *constante de proporcionalidad*.

Analicemos la relación siguiente entre las variables x y y expresada mediante la tabla

x	y
3	12
4	16
5	20
6	24
7	28

Observa que para cualquier par ordenado de la relación anterior, $\frac{y}{x} = 4$ $\left(\text{ya que } \frac{12}{3},\ \frac{16}{4},\ \frac{20}{5}, \text{ etc.}\right)$; es decir, la relación $\frac{y}{x}$ es constante; además, cuando x crece en una unidad esto implica un aumento en y de 4 unidades.

Cuando el valor de una variable aumenta e implica un incremento en el valor de otra, la relación entre ellas es *directa;* además, si esos aumentos son en la misma proporción, entonces la relación es de *proporcionalidad directa*.

Por tanto, en la tabla anterior y es *directamente proporcional* a x.

Veamos un ejemplo de aplicación de este tipo de variación en la vida real.

Ejemplo 1

Según la ley de Boyle, cuando la presión de un gas es constante, entonces el volumen que ocupa es directamente proporcional a su temperatura absoluta. Si a una temperatura de 54 K (grados kelvin) un gas ocupa un volumen de 30 metros cúbicos (m^3), ¿cuál es el volumen que ocuparía a una temperatura de 180 K?

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema, el volumen (v) es directamente proporcional a la temperatura absoluta (T); es decir,

$$\frac{v}{T} = K, \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{30\text{ m}^3}{54\text{ K}} = \frac{v}{180\text{ K}}, \qquad \text{luego}$$

$$v = \frac{30\text{ m}^3(180\text{ K})}{54\text{ K}}, \qquad \text{luego}$$

$$v = 100\text{ m}^3$$

Por tanto, cuando la temperatura del gas es de 180 K el gas ocupa un volumen de 100 m^3.

Variación directa con la *n*-ésima potencia

La variable y varía en forma directamente proporcional con la n-ésima potencia de x si la razón $\frac{y}{x^n}$ es constante, donde n es un número real positivo; es decir:

$$\frac{y}{x^n} = K, \text{ donde } K \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

O también se dice que y es directamente proporcional a x^n.

Analicemos la relación entre las variables x y y expresada mediante la tabla siguiente:

x	y
1	3
2	12
3	27
4	48
5	75

Fácilmente se observa que la razón $\frac{y}{x}$, entre cada par ordenado, no es constante, pero la relación entre las variables es directa, ya que al aumentar el valor de x aumenta el valor de y; sin embargo, la relación entre dichas variables no es proporcional.

Tratemos de encontrar una expresión que relacione las variables mediante una constante de proporcionalidad. Veamos qué sucede si elevamos los valores de x al cuadrado.

x^2	y
1	3
4	12
9	27
16	48
25	75

Observamos ahora que para cada par (x^2, y) la relación $\frac{y}{x^2}$ es constante $\left(\frac{3}{1}, \frac{12}{4}, \frac{27}{9}, \frac{48}{16}, \frac{75}{25} = 3\right)$.

En este caso, y es directamente proporcional al cuadrado de x; entonces, $y = Kx^2$.

En general, si y varía proporcionalmente a la n-ésima potencia de x, entonces:

$y = Kx^n$, donde n es un número real positivo y K una constante.

Ejemplo 2

Cuando un cuerpo cae libremente a partir del reposo, la distancia (d) que recorre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo (t) que transcurre a partir del comienzo de su caída. Si un cuerpo cae 63.51 metros (m) en 3.6 segundos (s), encuentra la distancia total recorrida al cabo de cinco segundos.

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema tenemos los siguientes pares ordenados de la forma (t, d): (3.6, 63.51) y (5, d); es decir, para un tiempo de 3.6 seg la distancia recorrida es 63.51 m, y para un tiempo de 5 s corresponde una distancia (d), cuyo valor queremos encontrar.

Como la variable d varía directamente con el cuadrado de t, entonces

$$K = \frac{d}{t^2}, \qquad \text{luego}$$

$$\frac{63.51\text{m}}{(3.6)^2} = \frac{d}{(5)^2}$$

$$d = \frac{63.51\text{ m}(5)^2}{(3.6)^2}$$

$$d = 63.51\text{ m}\left(\frac{5}{3.6}\right)^2$$

$$d = 122.5\text{ m}$$

Es decir, al final de cinco segundos de caída, el cuerpo ha recorrido 122.5 metros.

Variación inversamente proporcional

Se dice que la variable y es *inversamente proporcional* a la variable x si dicha variable y es directamente proporcional al recíproco de x, es decir, $y = K\left(\frac{1}{x}\right)$, de donde al despejar K resulta $K = xy$.

Analicemos la relación siguiente

x	y
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
24	1

De acuerdo con la tabla anterior, al aumentar el valor de x disminuye el valor de y; en este caso la relación entre las variables es *inversa*.

Por otro lado, también observamos que en la misma proporción en que aumenta la variable x disminuye la variable y, es decir, si x se duplica, el valor de y disminuye a la mitad; si x se triplica, y se reduce a la tercera parte y así sucesivamente. Por ello se dice que la relación entre las variables x y y es *inversamente proporcional*.

Asimismo, para la relación que nos ocupa el producto xy siempre es constante; en este caso es igual a 24; por tanto, $K = 24$.

Veamos una aplicación de este tipo de relación.

Ejemplo 3

Como hemos dicho, de acuerdo con la ley de Boyle, en un gas a temperatura constante, su volumen es inversamente proporcional a la presión a que está sujeto. Si a una presión de 24 libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2) el volumen de un gas es de 690 pies cúbicos (pies^3), ¿cuál es el volumen que ocuparía dicho gas cuando su presión es de 144 lb/pulg^2?

Solución

Según el enunciado del problema, los pares ordenados de la forma (P, V) que se mencionan son (24, 690) y (144, V), es decir, si $P = 24$, entonces $V = 690$ y a una presión de 144 lb/pulg^2 le corresponde un volumen V, que es el valor que queremos encontrar.

Como la relación entre las variables es inversamente proporcional, entonces:

$$K = PV, \qquad \text{de donde}$$

$$(24 \text{ lb/pulg}^2)(690 \text{ pies}^3) = 144 \text{ lb/pulg}^2 \,(V), \qquad \text{luego}$$

$$V = \frac{\left(24 \text{ lb/pulg}^2\right)\left(690 \text{ pies}^3\right)}{\left(144 \text{ lb/pulg}^2\right)}$$

$$V = 115 \text{ pies}^3$$

Para una presión de 144 lb/pulg^2 el gas ocupa un volumen de 115 pies cúbicos cuando su temperatura permanece constante.

Variación inversamente proporcional a la *n*-ésima potencia

Una variable y es inversamente proporcional a la n-ésima potencia de x si varía directamente con el recíproco de x^n, es decir:

$$y = K\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ donde } n \text{ es un número real positivo, } K \text{ es una constante,}$$

De acuerdo con lo anterior

$$y = \frac{K}{x^n}, \qquad \text{de donde resulta}$$

$$K = x^n y$$

En seguida se presenta un ejemplo de este tipo de relación.

Ejemplo 4

El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que lo separa del centro de la Tierra.

Si un astronauta pesa 784 newtons (N) en la superficie terrestre, ¿cuánto pesará cuando se encuentre a 80 kilómetros (km) sobre la superficie del planeta? (*Nota:* supón que el radio de la Tierra es de 6436 km.)

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema, para una distancia entre el astronauta y el centro de la Tierra, cuyo radio es de 6436 km, el astronauta tiene un peso de 784 N y como su peso (P) varía de manera inversa con el cuadrado de la distancia (d) a la que se encuentre del centro de la Tierra, entonces

$$K = d^2 p; \qquad \text{por tanto}$$

$$(6436 \text{ km})^2(784 \text{ N}) = [(6436 + 80) \text{ km}]^2 P, \qquad \text{luego}$$

$$(6436 \text{ km})^2(784 \text{ N}) = (6516 \text{ km})^2 P$$

$$P = \frac{(6436 \text{ km})^2(784\text{N})}{(6516 \text{ km})^2}$$

$$P = \left(\frac{6436}{6516}\right)^2 784 \text{ N}$$

Observa que cuando el astronauta se encuentra a 80 km sobre la superficie del planeta entonces se halla a una distancia de (80 + 6436) km del centro de la Tierra, es decir, $d = 6516$ km.

$$P = 764.87 \text{ N}$$

A una distancia de 80 km sobre la superficie terrestre, el peso del astronauta sería de 764.87 newtons.

Ejercicios 1

I. *Resuelve los ejercicios siguientes, donde las variaciones son modelos matemáticos de fenómenos reales, con base en cada uno de los planteamientos indicados.(Elige la opción correcta.)*

La masa muscular (m) de una persona varía de forma directamente proporcional con su peso total (P). Si una persona de 80 kilogramos (kg) de peso tiene una masa muscular de 32 kg,

1. Determina la masa muscular de una persona que pesa 150 kilogramos.

   a. 58 kg
   b. 62 kg
   c. 60 kg
   d. 65 kg

   c. 60 kg

2. Determina el peso de una persona cuya masa muscular es de 28 kilogramos.

   a. 72 kg
   b. 69 kg
   c. 70 kg
   d. 74 kg

   c. 70 kg

La aceleración (a) con que se desplaza un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada (F). Si un cuerpo se mueve con una aceleración de 3 metros por segundo cuadrado (m/s^2) cuando se le aplica una fuerza de 240 newtons (N), calcula:

3. La aceleración con que se movería si se le aplicara una fuerza de 280 newtons.

   a. 3.5 m/s^2
   b. 3.75 m/s^2
   c. 4 m/s^2
   d. 3.8 m/s^2

   a. 3.5 m/s^2

4. Determina la fuerza que se requiere aplicar sobre dicho cuerpo para que se mueva con una aceleración de 2 m/s^2.

   a. 150 N
   b. 165 N
   c. 156 N
   d. 160 N

   d. 160 N

La fuerza de atracción gravitacional (f) que ejerce la Tierra sobre un objeto es directamente proporcional a la masa (m) del objeto. Si la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de 50 kilogramos (kg) es de 490 newtons (N), determina:

5. La fuerza de atracción gravitacional cuando la masa es de 28 kilogramos.

a. 280 N
b. 269.6 N
c. 270.5 N
d. 274.4 N

d. 274.4 N

6. La masa de un objeto si la fuerza de atracción entre éste y la Tierra es de 588 newtons.

a. 60 kg
b. 58 kg
c. 62 kg
d. 70 kg

a. 60 kg

Cuando un cuerpo cae a partir del reposo, su velocidad es directamente proporcional al tiempo del vuelo. Si al final de dos segundos (s) la velocidad de un objeto que cae desde el reposo es de 19.6 metros por segundo (m/s), contesta las preguntas 7 y 8:

7. ¿Cuál será su velocidad a los cinco segundos?

a. 49 m/s
b. 52 m/s
c. 48 m/s
d. 50 m/s

a. 49 m/s

8. Cuando un cuerpo cae, ¿a los cuántos segundos su velocidad será de 63.7 m/s?

a. 6 s
b. 7 s
c. 6.5 s
d. 7.5 s

c. 6.5 s

La presión hidrostática (p) en el fondo de una alberca es directamente proporcional a la profundidad (h). Si a una profundidad de 1.5 m la presión hidrostática es de 14 700 newtons por metros cuadrado (N/m^2), determina:

9. La presión hidrostática a una profundidad de 2.4 metros.

   a. 124 600 N/m^2
   b. 23 520 N/m^2
   c. 21 480 N/m^2
   d. 24 000 N/m^2

b. 23 520 N/m^2

---

10. ¿A qué profundidad la presión hidrostática es de 15 680 N/m^2?

   a. 1.8 m
   b. 1.9 m
   c. 1.65 m
   d. 1.6 m

d. 1.6 m

Cuando la presión de un gas es constante, el volumen que ocupa es directamente proporcional a su temperatura absoluta. Si un gas ocupa un volumen de 50 metros cúbicos (m^3) cuando su temperatura es de 90 grados kelvin (K), determina:

11. El volumen que ocuparía si su temperatura fuera de 225 K.

   a. 125 m^3
   b. 120 m^3
   c. 123 m^3
   d. 127 m^3

a. 125 m^3

---

12. La temperatura del gas si éste ocupa un volumen de 60 m^3.

   a. 110 K
   b. 112 K
   c. 108 K
   d. 106 K

c. 108 K

La fuerza del aire sobre la vela de un barco varía de manera directamente proporcional con el cuadrado de su velocidad. Si la fuerza del aire sobre la vela de un barco es de 50 newtons por metro cuadrado (N/m^2) cuando su velocidad es de 25 kilómetros por hora (km/h),

13. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el aire sobre la vela de un barco cuando su velocidad es de 75 km/h?

a. 420 N/m^2
b. 475 N/m^2
c. 415 N/m^2
d. 450 N/m^2

d. 450 N/m^2

14. ¿Cuál es la velocidad del aire cuando ejerce una fuerza de 60 N/m^2 sobre la vela de un barco?

a. 30 km/h
b. 27.4 km/h
c. 29 km/h
d. 26.5 km/h

b. 27.4 km/h

La potencia que se requiere para impulsar un barco varía de manera directamente proporcional al cubo de su velocidad. Cuando un barco se desplaza con una velocidad de 12 nudos la potencia que lo impulsa es de 5184 caballos de fuerza (hp).

15. ¿Qué potencia se requiere para que el barco se desplace con una velocidad de 18 nudos?

a. 17 496 hp
b. 17 000 hp
c. 17 840 hp
d. 18 000 hp

a. 17 496 hp

16. ¿Cuál es la velocidad de un barco si se requiere de una potencia de 10 125 caballos de fuerza para impulsarlo?

a. 16 nudos
b. 14 nudos
c. 15 nudos
d. 17 nudos

c. 15 nudos

El peso normal de una persona es directamente proporcional al cubo de su altura. Si el peso normal de una persona de 2.03 metros (m) de altura es de 103.2 kilogramos (kg).

17. ¿Cuál es el peso normal de una persona cuya estatura es de 1.78 m?

a. 69.6 kg
b. 72.4 kg
c. 67.3 kg
d. 68.1 kg

a. 69.6 kg

18. ¿Cuál es la estatura de una persona si su peso normal es de 60.63 kg?

a. 1.7 m
b. 1.65 m
c. 1.8 m
d. 1.6 m

a. 1.7 m

Cuando un cuerpo cae a partir del reposo la distancia que recorre varía en proporción directa con el cuadrado del tiempo de vuelo. Si un cuerpo que se ha dejado caer desde el reposo recorre una distancia de 144 pies en tres segundos,

19. ¿Desde qué altura cayó dicho cuerpo si llegó a la superficie en 4 segundos (s)?

a. 250 pies
b. 260 pies
c. 256 pies
d. 265 pies

c. 256 pies

20. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a la superficie un objeto que se deja caer desde lo alto de un edificio de 207.36 pies de altura?

a. 4.2 s
b. 3.6 s
c. 3.0 s
d. 3.9 s

b. 3.6 s

La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor varía de manera inversamente proporcional con la resistencia eléctrica del mismo. Si la corriente (i) que fluye por un conductor es de 15 amperes cuando la resistencia eléctrica es de 6 ohms, determina:

21. La intensidad de la corriente si la resistencia eléctrica es de 10 ohms.

a. 9 amperes
b. 10 amperes
c. 8 amperes
d. 9.5 amperes

a. 9 amperes

---

22. El valor de la resistencia eléctrica de un conductor si por él circula una corriente de 5 amperes.

a. 20 ohms
b. 19 ohms
c. 18 ohms
d. 16 ohms

c. 18 ohms

A temperatura constante, el volumen que ocupa un gas es inversamente proporcional a la presión. Si el volumen que ocupa un gas es de 56 pulgadas cúbicas ($pulg^3$) cuando la presión es de 18 libras por pulgada cuadrada ($lb/pulg^2$).

23. ¿Cuál es su volumen si la presión es de 16 $lb/pulg^2$?

a. 60 $pulg^3$
b. 65 $pulg^3$
c. 61 $pulg^3$
d. 63 $pulg^3$

d. 63 $pulg^3$

---

24. ¿Cuál es la presión de un gas que ocupa un volumen de 50.4 $pulg^3$?

a. 18 $lb/pulg^2$
b. 20 $lb/pulg^2$
c. 22 $lb/pulg^2$
d. 19 $lb/pulg^2$

b. 20 $lb/pulg^2$

---

25. Doce hombres realizan cierto trabajo en ocho días. ¿Cuántos días tardarían 16 hombres?

a. 5
b. 4
c. 7
d. 6

a. 6

26. Un avión que vuela a 300 kilómetros por hora (km/h) tarda 20 minutos en llegar a su destino. ¿Cuánto tiempo tardaría si vuela a 500 km/h?

a. 12 min
b. 14 min
c. 15 min
d. 11 min

a. 12 min

El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Si un objeto pesa 80 newtons (N) en la superficie terrestre,

27. ¿Cuál será su peso a una distancia de 1000 kilómetros (km) por encima de la superficie terrestre? Considera que el radio de la Tierra es de 6436 kilómetros.

a. 59.9 N
b. 54.6 N
c. 62.5 N
d. 65 N

a. 59.9 N

28. ¿A qué distancia por encima de la superficie terrestre dicho cuerpo pesará la mitad de lo que pesa en la Tierra?

a. 2700 km
b. 2600 km
c. 2665.9 km
d. 2940.5 km

c. 2665.9 km

La iluminación (i) de una fuente luminosa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir de la fuente. Si a una distancia de 6 metros (m) la iluminación que produce una fuente de luz es de 75 bujías,

29. ¿Cuál es la iluminación que produce dicha fuente a una distancia de 12 m?

a. 20 bujías
b. 18.75 bujías
c. 17.5 bujías
d. 17 bujías

b. 18.75 bujías

30. ¿A qué distancia de la fuente se produce una iluminación de 12 bujías?

a. 14 m
b. 16 m
c. 15 m
d. 17 m

c. 15 m

Evaluación

I. *Elige la respuesta correcta.*

1. La fuerza que se requiere para estirar un resorte es directamente proporcional a la elongación. Si una fuerza de 35 newtons (N) estira 7 centímetros (cm) un resorte, ¿qué fuerza se requiere para estirar ese mismo resorte 11 cm?

a. 48 N
b. 60 N
c. 50 N
d. 57 N
e. 55 N

e. 55 N

2. El peso de una esfera varía de manera directamente proporcional con el cubo de su radio. Si una esfera de tres pulgadas de radio pesa 10.125 libras (lb), ¿cuál es el peso de una esfera de 16 pulgadas de diámetro?

   a. 192 lb
   b. 186 lb
   c. 180 lb
   d. 197 lb
   e. 200 lb

a. 192 lb

3. El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Si un cuerpo pesa 80 newtons en la superficie terrestre, ¿cuánto pesará si se encuentra a una distancia de 300 millas por encima de la superficie del planeta? Considera que el radio de la Tierra es de 6436 kilómetros.

   a. 69.22 newtons
   b. 60.5 newtons
   c. 72 newtons
   d. 63.2 newtons
   e. 65 newtons

a. 69.22 newtons